Die bernoullische Gleichung und deren Anwendung

Gegeben sei eine Strömungsröhre mit unterschiedlichem Querschnitt.

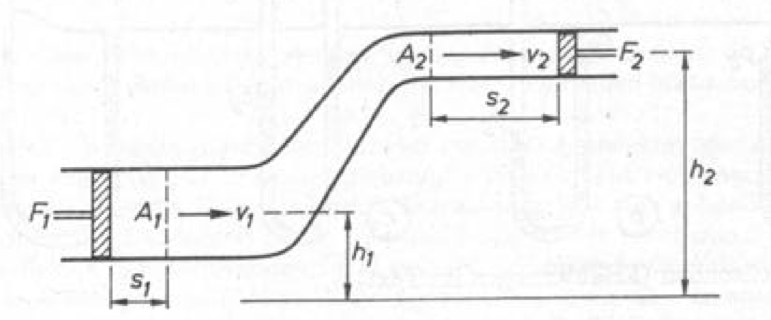

Bild 2.26. Zur Herleitung der Bernoullischen Gleichung

Eine Flüssigkeit bewegt sich durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt unter der Wirkung einer *Druckdifferenz* $\Delta p = p_1 - p_2$ die mittels zweier Kolben an den Rohrenden mit den Querschnitten A_1 und A_2 durch die Kräfte F_1 und F_2 erzeugt wird. Beim Verschieben des Kolbens ***1*** um die Strecke s_1 wird die Arbeit

$$F_1 \cdot s_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1 = p_1 \cdot V$$

auf die Flüssigkeit übertragen und bei der gleichzeitig stattfindenden Bewegung des Kolben ***2*** um s_2 von der (inkompressiblen) Flüssigkeit die Arbeit

$$F_2 \cdot s_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot s_2 = p_2 \cdot V$$

abgegeben;
der Differenzbetrag $(p_1 - p_2) \cdot V$ tritt als Zuwachs an kinetischer und an potentieller Energie der Flüssigkeitsteilchen zwischen den Höhenniveaus h_1 und h_2 in Erscheinung:

$$(p_1 - p_2) \cdot V = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + mg(h_2 - h_1).$$

Ordnen der Größen und Division durch das Volumen V führt zu der Druckbilanz

$$p_1 + \frac{\boldsymbol{r}}{2} \cdot v_1^2 + \boldsymbol{r} \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{\boldsymbol{r}}{2} \cdot v_2^2 + \boldsymbol{r} \cdot g \cdot h$$ oder

$$p + \frac{\boldsymbol{r}}{2} \cdot v^2 + \boldsymbol{r} \cdot g \cdot h = const = p_{Ges}$$ **(bernoullische Gleichung).**

Dabei ist p der *statische Druck* (Kolbendruck), $\frac{\boldsymbol{r}}{2} \cdot v^2$ der *dynamische Druck* (Staudruck), $\boldsymbol{r} \cdot g \cdot h$ der *Schweredruck* und p_{Ges} der Gesamtdruck.

An jedem Ort einer Stromlinie ist der Gesamtdruck, d.i., die Summe aus statischem Druck, dynamischen Druck (Staudruck) und Schweredruck, gleich.

Bei vernachlässigbarer Höhendifferenz innerhalb der Strömung vereinfacht sich die Gleichung zu

$$p + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = const = p_{Ges} .$$