Anwendung des I. Hauptsatze auf spezielle Zustandänderungen des idealen Gases

Es werden folgende spezielle Zustandänderungen betrachtet:

- Isobare Zustandsänderung,
- Isochore Zustandsänderung und
- Isotherme Zustandsänderung
- Adiabatische Zustandsänderung.

Isobare Zustandsänderung $(p = const.)$

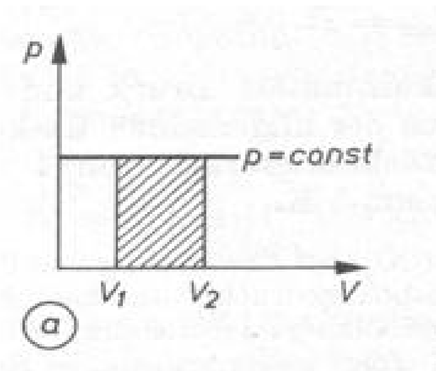
Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases $pdV = n \cdot R \cdot dT$ folgt für konstanten Druck durch Differentiation

$$pdV = n \cdot R \cdot dT \text{ ,}$$

womit der I. Hauptsatz die Form $dU = dQ - nRdT$ annimmt bzw.

$$dQ = mc_p dT = \frac{c_p}{c_V} dU \text{ .}$$

Das heißt, die einem Gas zugeführte Wärmemenge geht nicht vollständig in innere Energie des Gases über. Die Differenz $dQ - dU$ entfällt auf die Ausdehnungsarbeit des Gases gegenüber dem konstanten äußeren Druck.



Im p,V-Diagramm sind die Linien gleichen Druckes, die sog. Isobaren, Parallelen zu V-Achse. Die Volumenarbeit von V_1 auf V_2 vom Gas bzw. am Gas isobar verrichtete Arbeit ist:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1) = nR(T_1 - T_2) \text{.}$$

Isobare Vorgänge sind nicht auf Gase beschränkt. Zum Beispiel verlaufen alle Vorgänge in der freien Atmosphäre, u.a. Schmelzen und Verdampfen, isobar.

Isochore Zustandsänderung $(V = const.)$

Wegen dV=0 verrichtet das Gas ***keine*** Volumenarbeit, d.h. der erste Hauptsatz nimmt bei isochorer Zustandsänderung die Form:

$$dU = dQ \text{ an.}$$

Das heißt, die gesamte dem Gas zugeführte Wärme findet sich in der Erhöhung der inneren Energie des Gases wieder. Im p,V-Diagramm wird diese Zustandsänderung durch eine Parallele zur p-Achse beschrieben.

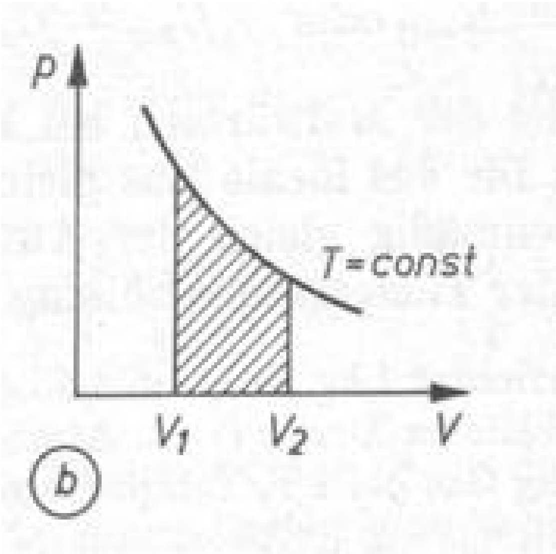
Isotherme Zustandsänderung $(T = const.)$

Wegen $dT=0$ und demzufolge $dU=0$ lautet der erste Hauptsatz hier:

$$dQ = pdV = -dW \ ,$$

d.h., die dem Gas zugeführte Wärme erhöht nicht dessen innere Energie, sondern wird vollständig in Volumenarbeit des Gases umgesetzt. Die bei Volumenänderung von V_1 auf V_2 isotherm verrichtete Arbeit errechnet sich zu

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right).$$



Die Kurven bei konstanter Temperatur stellen im p,V-Diagramm gleichseitige Hyperbeln dar, werden als *Isothermen* bezeichnet und liegen um so weiter von der p-Achse entfernt, je höher die Temperatur ist.

Adiabatische Zustandsänderung

Wird bei einer Zustandsänderung ein Wärmeaustausch zwischen System und Umgebung verhindert, indem z.B. durch eine entsprechende Wärmeisolation des Gefäßes dafür gesorgt wird, dass das darin enthaltene Gas weder Wärme aufnehmen noch abgeben kann, so spricht man von einer ***adiabatischen Zustandsänderung***. Für sie gilt also dQ=0, womit der erste Hauptsatz lautet:

$$dU = -pdV = dW \ .$$

Bei einer adiabatischen Expansion verrichtet das Gas Arbeit auf Kosten seiner inneren Energie, wodurch die Temperatur sinkt; adiabatische Kompression erhöht die innere Energie des Gases um den Betrag an aufgewandter Kompressionsarbeit, womit die Temperatur ansteigt.
Es ändern sich hierbei alle drei Zustandsgrößen p,V und T.
Die Zustandsfunktion, die bei solchen adiabatischen Vorgängen konstant bleibt, heißt Entropie.
Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen den Zustandsgrößen setzt man den durch Differentiation der Gasgleichung $pV = n \cdot R \cdot T$ gewonnenen Ausdruck:

$$dT = \frac{(pdV + Vdp)}{nR}$$

in die Beziehung: $dU = mc_V \, dT$ ein, womit aus obiger Gleichung für den ersten Hauptsatz folgt:

$$dU = \frac{mc_V}{R}\left(pdV + Vdp\right) = -pdV\,.$$

Mit $R = m\left(c_p - c_V\right)$ ergibt sich hieraus nach Umformung:

$$\frac{c_p}{c_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0\,.$$

Führt man hier den Adiabatenexponenten $\boldsymbol{k} = \frac{c_p}{c_V}$ ein, so erhält man durch Integration der Gleichung und Umformung:

$$\boldsymbol{k} \cdot \ln V + \ln p = \ln V^k + \ln p = \ln\left(pV^k\right) = const.$$

oder

$$pV^k = const.$$ **(Poissonsche Adiabatengleichung)**.

Mit Hilfe des allgemeinen Gasgesetzes $\frac{pV}{T} = const.$ lässt sich diese Gleichung auch auf andere Paare von Zustandsgrößen umrechnen; man erhält so

$$T \cdot V^{k-1} = const. \quad \text{und} \quad T \cdot p^{\frac{1-k}{k}} = const.$$

Die adiabatische Volumenarbeit berechnet sich wegen $dW = dU$ zu

$$W = mc_V\left(T_2 - T_1\right).$$