<u>Energiebetrachtungen am Schwingkreis</u>

Da in diesem Schwingkreis kein ohmscher Widerstand betrachtet wurde, ist die Gesamtenergie konstant, da es theoretisch nur zu einer Umwandlung von elektrischer in magnetische Feldenergie kommt und keine weiteren Energieumwandlungen zugelassen werden.
Im Kondensator wird die Energie:

$$E_{elektr.} = \frac{1}{2} C U_C^2 \text{ gespeichert.}$$

In der Spule ist die Energie:

$$E_{magn.} = \frac{1}{2} L I^2 \text{ gespeichert.}$$

Auf Grund der vorangegangenen Betrachtung ergibt sich der Energieerhaltungssatz für einen elektromagnetischen Schwingkreis:

$$E_{elektr.} + E_{magn.} = konst..$$

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, eine Untersuchung des Spannungsverhaltens im Schwingkreis anzustreben.

Ansatz: $\frac{1}{2} C U_C^2 + \frac{1}{2} L I^2 = konst..$

Wir ersetzen die Stromstärke durch die Spannung.
Es gilt: $Q = C \cdot U$ und

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}.$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \ddot{Q}$$

Es gilt demzufolge:

$$\dot{Q} = C \cdot \dot{U} \Rightarrow \ddot{Q} = C \cdot \ddot{U}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{2} C U_C^2 + \frac{1}{2} L \left(C \cdot \dot{U} \right)^2 = konst. = \frac{1}{2} C U_C^2 + \frac{1}{2} L C^2 \cdot \dot{U}_{ind}^2.$$

Um die Zeitabhängigkeit der Spannungsmaximalwerte zu erhalten, muss der Energieerhaltungssatz einmal nach der Zeit differenziert werden. Zu beachten sind dabei entsprechende Differentiationsregeln (z.B. Kettenregel).

Damit gilt: $$\frac{\frac{1}{2} C U_C^2 + \frac{1}{2} L C^2 \dot{U}_{ind}^2}{dt} = \frac{konst.}{dt}.$$

Daraus folgt:

$$C U_C \dot{U}_C + L C^2 \cdot \dot{U}_{ind} \ddot{U}_{ind} = 0.$$

Da $U_C = U_{ind}$ ist, gilt:

$$C \dot{U} \left(U + LC \cdot \ddot{U} \right) = 0.$$

Ein Produkt ist dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Da $C\dot{U}$ in jedem Fall nicht Null sein kann, muss gelten:

$$\left(U + LC\cdot\ddot{U}\right) = 0 \text{ oder } \ddot{U} + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Mit $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$ erhält man:

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung II. Ordnung bezüglich der Spannung in einem elektromagnetischen Schwingkreis ohne ohmschen Widerstand, welche durch ein bekanntes übliches Verfahren gelöst werden kann.

Es gilt nun, diese für diese Differentialgleichung alle möglichen Lösungen zu ermitteln. Differentialgleichungen werden, wenn sie überhaupt explizit lösbar sind, häufig durch geeignete Lösungsansätze gelöst, d.h. man ermittelt durch probieren eine spezielle Lösung und versucht unter Anwendung des **Fundamentalsatzes der Algebra**, alle möglichen Lösungen zu ermitteln.
Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, das sich ein Polynom n-ten Grades als Produkt seiner Nullstellen (spezielle Lösungen) darstellen lässt (s. Polynomdivision Klasse 11).
Eine spezielle Lösung der o.g. Gleichung lautet:

$$U(t) = A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t}.$$

Diese Gleichung dient auch gleichzeitig als Lösungsansatz.
Dieser e-Ansatz wird wie folgt gewählt:

Ansatz: $U(t) = A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t}$.

Dann gilt: $\dot{U}(t) = i\cdot\lambda\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t}$ und

$$\ddot{U}(t) = i\cdot i\cdot\lambda^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} = i^2\cdot\lambda^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} = -\lambda^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t}.$$

Nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$-\lambda^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} + \frac{1}{LC}\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} = 0.$$

Mit $\dfrac{1}{LC} = \omega^2$ erhält man die s.g. thomsonsche Schwingungsgleichung und:

$$-\lambda^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} + \omega^2\cdot A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t} = 0.$$

Jetzt gilt es den Parameter λ zu bestimmen.

Es gilt: $A\cdot e^{i\cdot\lambda\cdot t}\cdot\left(\omega^2 - \lambda^2\right) = 0$.

Ein Produkt ist dann Null, wenn mindestens ein Faktor 0 ist. Der Faktor der e-Funktion kann niemals Null werden, also muss gelten:

$$\left(\omega^2 - \lambda^2\right) = 0.$$

Dann gilt: $\omega^2 = \lambda^2 \Rightarrow \omega_{1;2} = \pm\sqrt{\lambda^2} \Rightarrow \omega_1 = \lambda \wedge \omega_2 = -\lambda$.

Damit erhält man über den Lösungsansatz zwei spezielle Lösungen der Differentialgleichung durch Einsetzen in den Lösungsansatz:

$$U_1(t) = A\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \text{ und}$$

$$U_2(t) = A\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}.$$

Die **Linarkombination** zweier spezieller Lösungen einer Differentialgleichung ergibt die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Damit gilt: $U_1(t)+U_2(t)=U(t)=A\cdot\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right).$

Diese Gleichung wird nun mit der Zahl 2 erweitert. Dann gilt:

$$U_1(t)+U_2(t)=U(t)=2A\cdot\frac{\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}{2}.$$

Nach dem gaußschen Additionstheorem $\cos\varphi=\frac{\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}{2}$ gilt:

$$U_1(t)+U_2(t)=U(t)=2\cdot A\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

$2A$ stellt die Amplitude der Ladungsmenge dar, womit dann gilt: $U_1(t)+U_2(t)=U(t)=U_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$.

Damit ist es möglich, aus einer gegebenen Gleichspannung eine Wechselspannung einer bestimmte Frequenz zu erzeugen.

Beispiel: Erzeugung von Wechselspannungen durch Solarzellen

Damit erhält man für einen Schwingkreis bei einer **ungedämpften** (ohne „Energieverluste“) **elektromagnetischen Schwingung** für die Ladungsmenge, Stromstärke und Spannung folgende Ergebnisse:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t)&=Q_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\\ I(t)&=-I_0\sin(\omega\cdot t)\\ U(t)&=U_0\cdot\cos(\omega\cdot t): \end{aligned}}$$