Der elektrische Schwingkreis

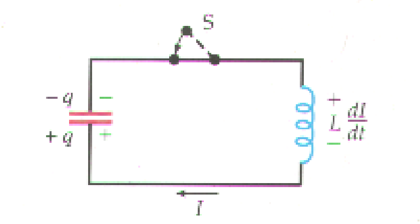
Hauptaufgabe:

Unter Verwendung von Schwingkreisen ist es möglich, eventuell vorhandene Gleichspannungen in Wechselspannungen umzuwandeln.

Es gibt **zwei** grundsätzliche **Arten eines Schwingkreises**:

1. der Parallelschwingkreis,
2. der Reihenschwingkreis.

Gegenstand dieses Abschnitts sind einige einfache Schaltungen, die Induktivitäten (L), Kapazitäten (C) und Widerstände (R), jedoch keine Wechselspannungsquellen enthalten. Zunächst untersuchen wir eine Schaltung (**Parallelschwingkreis**) aus einer Induktivität und einer Kapazität, jedoch ohne ohmschen Widerstand.



28.10 Ein *LC*-Kreis (ungedämpfter Schwingkreis). Wird der Stromkreis mit dem Schalter S geschlossen, so entlädt sich der ursprünglich geladene Kondensator über die Spule. Dabei wird in der Spule eine Gegenspannung induziert.

Auf dem Kondensator befindet sich anfangs eine Ladung Q_0 und der Schalter sei geöffnet. Wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Stromkreis durch den Schalter geschlossen, so beginnt die Ladung durch die Spule zu fließen, der Kondensator entlädt sich über die Spule (ohmscher Widerstand). In der Abbildung wurden Vorzeichen der Ladung und Stromrichtung so gewählt, dass

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ ist.}$$

Für die Spannung gilt im Idealfall (keine „Energieverluste“):

$$U_{ind} = U_C .$$

In diesem konkreten Fall gilt somit:

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} \text{ wegen } U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} \text{ und } C = \frac{Q}{U}.$$

Damit gilt:

$$-L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \text{ und}$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Für $I = \frac{dQ}{dt}$, welches die erste Ableitung der Ladungsmenge nach der Zeit darstellt kann man auch schreiben: $I = \dot{Q}$. Das in die Gleichung $L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ eingesetzt ergibt demzufolge eine Differentialgleichung der Form:

$$L\frac{d\dot{Q}}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \text{ oder bei nochmaliger Ableitung}$$

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \text{ oder}$$

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \; .$$

Diese Gleichung stellt eine ***lineare homogene Schwingungsdifferentialgleichung II. Ordnung*** dar.
Es gilt nun, diese für diese Differentialgleichung alle möglichen Lösungen zu ermitteln. Differentialgleichungen werden, wenn sie überhaupt explizit lösbar sind, häufig durch geeignete Lösungsansätze gelöst, d.h. man ermittelt durch probieren eine spezielle Lösung und versucht unter Anwendung des **Fundamentalsatzes der Algebra**, alle möglichen Lösungen zu ermitteln.
Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, das sich ein Polynom n-ten Grades als Produkt seiner Nullstellen (spezielle Lösungen) darstellen lässt (s. Polynomdivision Klasse 11).

Eine spezielle Lösung der o.g. Gleichung lautet:

$$Q(t) = A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} .$$

Diese Gleichung dient auch gleichzeitig als Lösungsansatz.
Dieser e-Ansatz wird wie folgt gewählt:

Ansatz: $Q(t) = A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t}$.

Dann gilt: $\dot{Q}(t) = i \cdot \lambda \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t}$ und

$$\ddot{Q}(t) = i \cdot i \cdot \lambda^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} = i^2 \cdot \lambda^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} = -\lambda^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} .$$

Nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$-\lambda^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} + \frac{1}{LC} \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} = 0 .$$

Mit $\frac{1}{LC} = \omega^2$ erhält man die s.g. thomsonsche Schwingungsgleichung und:

$$-\lambda^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} + \omega^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} = 0 .$$

Jetzt gilt es den Parameter λ zu bestimmen.

Es gilt: $A \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} \cdot \left(\omega^2 - \lambda^2\right) = 0$.

Ein Produkt ist dann Null, wenn mindestens ein Faktor 0 ist. Der Faktor der e-Funktion kann niemals Null werden, also muss gelten:

$$\left(\omega^2 - \lambda^2\right) = 0 .$$

Dann gilt: $\omega^2 = \lambda^2 \Rightarrow \omega_{1;2} = \pm\sqrt{\lambda^2} \Rightarrow \omega_1 = \lambda \wedge \omega_2 = -\lambda$.

Damit erhält man über den Lösungsansatz zwei spezielle Lösungen der Differentialgleichung durch Einsetzen in den Lösungsansatz:

$$Q_1(t) = A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \text{ und}$$
$$Q_2(t) = A \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}.$$

Die **Linarkombination** zweier spezieller Lösungen einer Differentialgleichung ergibt die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Damit gilt: $Q_1(t) + Q_2(t) = Q(t) = A \cdot \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right).$

Diese Gleichung wird nun mit der Zahl 2 erweitert. Dann gilt:

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q(t) = 2A \cdot \frac{\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}{2}.$$

Nach dem Gaußschen Additionstheorem $\cos\varphi = \frac{\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)}{2}$ gilt:

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q(t) = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

$2A$ stellt die Amplitude der Ladungsmenge dar, womit dann gilt: $Q_1(t) + Q_2(t) = Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$

Aufgabe für den Schüler:

Zeigen Sie durch eine geeignete Probe das die Gleichung $Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ Lösung der Gleichung $\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$ ist.

Das ist die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung!

Da bewegte Ladungsmengen den Stromfluss darstellen gilt für die Stromstärke:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0 \cos(\omega \cdot t)}{dt} = -Q_0 \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = -I_0 \sin(\omega \cdot t)$$

Das Minuszeichen gibt die Richtung des elektrischen Stromes an, d.h. in dem Maße wie die Anzahl der Ladungsträger am Kondensator abnimmt, nimmt die Stromstärke in der Spule zu. Immer wenn der Strom sein Maximum erreicht, ist die Ladungsmenge gleich null.