Relativistischer Doppelereffekt

Die Behandlung des Doppler – Effekts für Schallwellen ergab, dass die Veränderung der Frequenz für eine vorgegebene Geschwindigkeit *v* davon abhängt, ob sich die Quelle oder der Beobachter mit dieser Geschwindigkeit bewegt. Diese Unterscheidung ist für Schallwellen möglich, weil ein Medium (die Luft) existiert, in der die Bewegung stattfindet.
Eine solche Unterscheidung lässt sich für Licht oder andere elektromagnetische Wellen im Vakuum jedoch nicht treffen, denn das Vakuum dient **nicht** als Medium für die Übertragung dieser Wellen.
Die ausdrücke, die wir für den Dopplereffekt erhielten, können daher für das Licht nicht gültig sein. Im folgenden wollen wir die für das Licht korrekten relativistischen Gleichungen des Doppler – Effekts herleiten.
Dazu betrachten wir eine Quelle, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v in Richtung eines Beobachters bewegt, wobei wir im folgenden im Ruhesystem des Beobachters arbeiten.
Die Quelle emittiert *N* elektromagnetische Wellenberge in einem vom Beobachter gemessenen Zeitintervall Δt_B. Während der erste Wellenberg in diesem Zeitintervall eine Entfernung $c \cdot \Delta t_B$ zurücklegt, bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v \cdot \Delta t_B$ auf den Beobachter zu. Die Wellenlänge der vom Beobachter empfangenden Welle ist daher

$$\lambda' = \frac{c\Delta t_B - v\Delta t_B}{N},$$

und die vom Beobachter gemessene Frequenz der Wellen ist somit

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c-v)} \cdot \frac{N}{\Delta t_B} = \frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \cdot \frac{N}{\Delta t_B}.$$

Ist die Frequenz der Welle im Ruhesystem der Quelle gleich f_0, so emittiert sie $N = f_0 \Delta t_Q$ Wellenberge im Zeitintervall Δt_Q, wobei Δt_Q ein Eigenzeitintervall ist, da im Ruhesystem der Quelle die Wellenberge immer am selben Ort emittiert werden. Die Zeitintervalle Δt_Q und Δt_B sind über die Gleichung $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_E$ (Zeitdilatation) miteinander verbunden. Es gilt $\Delta t_B = \gamma \cdot \Delta t_Q$, und wir erhalten für den fall einer sich auf den Beobachter zu bewegenden Quelle

$$f' = \frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{f_0 \Delta t_Q}{\Delta t_B} = \frac{f_0}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

oder

$$f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} \cdot f_0 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \cdot f_0.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der klassischen Gleichung nur durch den Faktor für die Zeitdilatation. Im Fall einer sich vom Beobachter wegbewegenden Quelle ergibt sich:

$$f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} \cdot f_0 = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot f_0.$$

Beispielaufgabe:

Das langwellige Licht der Balmer – Serie von Wasserstoff hat eine Wellenlänge von $\lambda_0 = 656nm$. Im Licht einer entfernten Galaxie wird die Wellenlänge dieser Linie zu $\lambda' = 1458nm$ gemessen. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Galaxie von der Erde wegbewegt?

Substituieren wir $f' = \frac{c}{\lambda'}$ und $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ in $f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} \cdot f_0 = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot f_0$, so erhalten wir

$$\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = \frac{f'}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda'}.$$

Diese Gleichung lässt sich mit der Abkürzung $\beta = \frac{v}{c}$ noch etwas einfacher schreiben, Quadrieren und Umstellen führt auf

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{1458nm}{656nm}\right)^2 = 4{,}94,$$

was sich nach β auflösen lässt:

$$1+\beta = 4{,}94 - 4{,}94\beta$$

$$\beta = \frac{4{,}94-1}{4{,}94+1} = 0{,}663 = \frac{v}{c}.$$

Die Galaxie bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}663c$ von der Erde weg. Eine derartige Verschiebung des Lichtes zu längeren Wellenlängen heißt ***Rotverschiebung***.