Längenkontraktion

Nach der Galilei - Transformation gilt $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$, d.h. , die Länge $l = x_2' - x_1'$ eines Stabes bleibt konstant. Das gilt nach der Lorentz - Transformation nicht mehr: Die gemessenen Längen sind in S und S' verschieden.

Die Längenmessung ist dadurch definiert, dass man einen Maßstab an die zu messende Strecke legt und den Abstand der Messstabstriche abliest, die in einem bestimmten Moment mit den Enden der Messstrecke zusammenfallen. Das ist völlig klar, wenn Maßstab und Messstrecke *ruhen*. Besteht zwischen beiden aber eine Relativgeschwindigkeit v, so ergibt sich zwar für das ruhende System die Strecke $l = x_2 - x_1$, für das bewegte System S' gilt hingegen (vom ruhenden System aus betrachtet)

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nun müssen die Zeiten t_1 und t_2 so bestimmt werden, dass in dem System S' Anfangs- und Endpunkt des Maßstabes im selben Moment gemessen werden; es muss demnach $t_2' = t_1'$ sein. Es ist

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

Aus der geforderten Gleichheit folgt

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

und damit

$$l' = \frac{x_2 - x_1 - v \cdot \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x_2 - x_1)(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$

$$l' = l \cdot \sqrt{1-\beta^2} \quad .$$

Vom bewegten Beobachter aus gesehen, erscheint damit die Länge verkürzt. Dieses Ergebnis stellt auch der im anderen System befindliche Beobachter für die Längen im bewegten System fest:

$$l = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad .$$

Diese Beziehung folgt durch relativistische Vertauschung, nicht etwa durch Auflösung nach l.