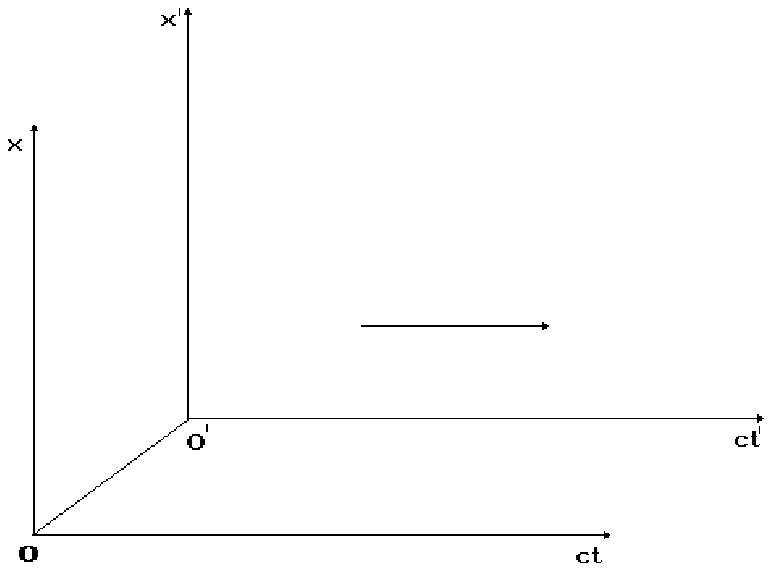
Lorentz - Transformation

H. A. Lorentz hatte bereits vor EINSTEIN Formeln angegeben, die an die Stelle der Galilei - Transformation treten und die als Spezialfall diese klassischen Transformationsformeln enthalten. Sie galten jedoch nur als bequeme Umrechnungsformeln. Erst EINSTEIN erkannte die grundsätzliche Bedeutung dieser Zusammenhänge, die in Formeln zum Ausdruck kommen, und führte den radikalen Bruch mit den bis dahin gültigen Raum - Zeit - Vorstellungen herbei.
Die Lorentz - Transformation kann elementar am kürzesten wie folgt hergeleitet werden:



Man geht von der Galilei - Transformation $x' = x - ct$ aus und macht für die Lorentz - Transfor-
mation folgenden Ansatz: $x' = k(x - ct)$, wobei k ein noch zu bestimmender Korrekturfaktor sein soll.
Von den System S und S' ist keines bevorzugt, so dass man auch in der Umkehrgleichung $x = k(x' + ct)$ denselben Ansatz machen kann:

$$x = k(x' + ct') \ .$$

Wegen des Prinzips der konstanten (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit gilt $x = c \cdot t$ und $x' = c \cdot t'$.
In jedem System wird - unabhängig von der Relativgeschwindigkeit v - die gleiche Lichtgeschwindigkeit gemessen, so dass $c \equiv c'$. Damit erhält man

$$x' = k\left(x - \frac{v}{c}x\right) = kx(1 - \beta),$$

$$x = k\left(x' - \frac{v}{c}x'\right) = kx' \cdot (1 - \beta),$$

wobei $\beta = v / c$.
Nach Multiplikation dieser Gleichungen erhält man

$$x'x = k^2 xx'(1 - \beta^2),$$

also schließlich

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Für die Zeit t' ergibt sich dann mit $t' = x' / c$ die Umrechnungsformel

$$t' = \frac{x - vt}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{x}{c} - \frac{v}{c^2}ct}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und entsprechend

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Benutzt man an Stelle der Galilei - Transformation die Lorentz - Transformation, so lässt sich das Ergebnis des Michelson - Versuches $(\Delta t = 0)$ wie folgt deuten:
Der Arm der Versuchsapparatur AB befindet sich in einem S' - System. Der dazu senkrechte Arm AC nimmt in seiner Längsrichtung an dieser Bewegung nicht teil: er befindet sich daher in einem S - System. Die Michelsonsche Versuchsapparatur vereinigt demnach zwei relativ zueinander bewegte Systeme. Die ursprünglich klassische Rechnung benutzt gleiche (unveränderte) Maßeinheiten für die Strecken und Zeiten in beiden Systemen. Das gilt aber in der Relativitätstheorie nicht mehr. Vom S - System aus ist der Arm AB verkürzt: $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Damit erhält man statt t_1 nun

$$t_1^* = \frac{2l_0}{c} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)} \ , \ \text{also} \ \ t_1^* = \frac{2l_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Für t_2 erhält man mit $l = l_0$ nunmehr

$$t_2 = \frac{2l_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ,$$

so dass sich tatsächlich

$$t_1^* - t_2 = \Delta t = 0$$

ergibt, womit das Ergebnis des Michelson - Versuches erklärt ist.
Das Ergebnis kann aber auch für den Fall interpretiert werden, dass sich ein Beobachter im System S' mitbewegt. Hierbei hat der Beobachter die Zeitdilatation im S - System, dass sich relativ zu S' bewegt, zu beachten. In diesem Falle ist statt t_2 nunmehr t_2^* einzusetzen:

$$t_2^* = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ,$$

denn die Uhr, die t_2 anzeigt, läuft langsamer als die Uhr, an der t_2^* abgelesen wird.
Damit erhält man

$$t_2^* = \frac{2l_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \text{also} \ \ t_2^* = \frac{2l_0}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \ .$$

Mann erhält auch für diesen Fall

$$t_1 - t_2^* = \frac{2l_0}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{1-\beta^2}\right) = \Delta t = 0 \ ,$$

so dass ein irdischer (ruhender) Beobachter das Messergebnis bestätigt.

Es ergeben sich demnach mit $k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ folgende spezielle Lorentz - Transformationen.:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Die gestrichenen Größen folgen aus den ungestrichenen (und umgekehrt) durch relativistische Vertauschung: d.h. es können S- und S' Größen miteinander vertauscht werden, wenn gleichzeitig die Geschwindigkeit das Vorzeichen ändert.