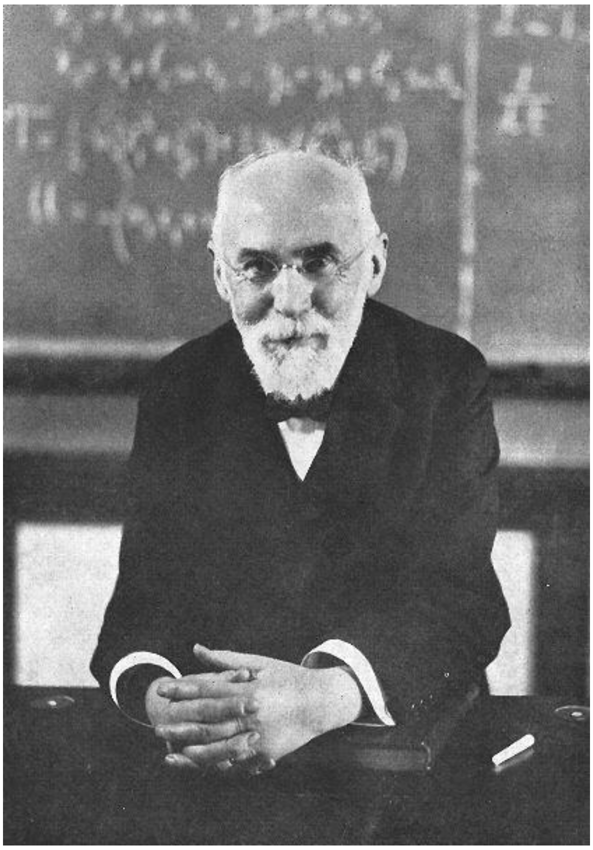
Biographisches



- 1853 – 1928
- niederländischer Mathematiker und Physiker
- 1878 Professor für mathematische Physik
- wichtige Entdeckungen:
    - Lorentzkraft
    - Mehrere bedeutende Beiträge zur Relativitätstheorie wie:
        - Lorentztransformation
        - Lorentz-FitzGerald-Kontraktion
    - Zeeman-Effekt (Nobelpreis mit Pieter Zeeman)

Galilei – Transformation

Ziel:

- Überführung (Transformation) der Koordinaten eines Inertialsystems I der klassischen Mechanik in ein anderes Inertialsystem I'
- Vergleich eines physikalischen Prozesses in zwei verschiedenen Inertialsystemen

Voraussetzung: Zwei Inertialsysteme die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v_x entlang der x-Achse bewegen

Nimmt man nun an, dass zum Zeitpunkt 0 die Koordinatenursprünge übereinstimmen, so erhält man als einfachste Form der Galilei-Transformation:

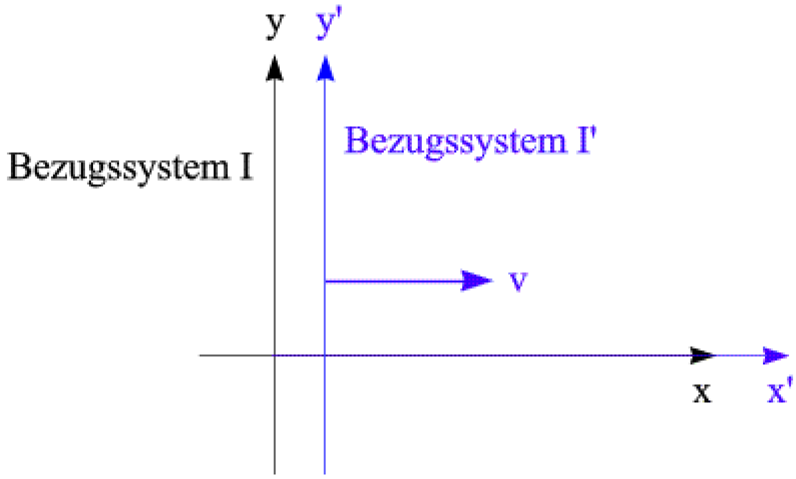
$$x' = x - t \cdot v_x \qquad x = x' + t' \cdot v_x$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

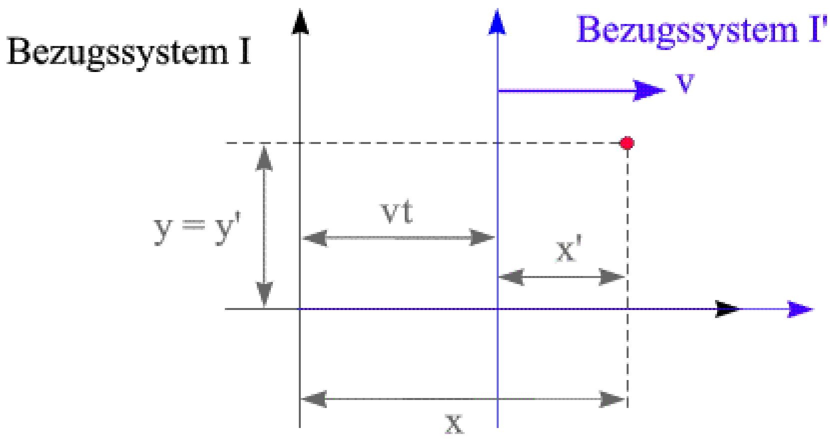
$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = t \quad \text{bzw. als inverse Transformation} \quad t = t'$$

Diese Gleichungen gelten nur für den Fall, dass $v_x << c$.



Nach einer bestimmten Zeit t geschieht ein Ereignis:



Wird nun ein bewegtes Teilchen im Inertialsystem I mit der Geschwindigkeit $u_x = \dfrac{dx}{dt}$ betrachtet, so besitzt dieses Teilchen im Inertialsystem I' die Geschwindigkeit:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - v_x \cdot t)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(v_x \cdot t)}{dt} = u_x - v_x$$

Betrachten wir nun einen Lichtstrahl der sich entlang der x-Achse ausbreitet, besitzt er in den Inertialsystemen die Geschwindigkeit $u_x = c$ bzw. $u_x' = c - v_x$. Dies widerspricht aber den Einstein'schen Postulaten, welche besagen, dass kein Inertialsystem bevorzugt ist und die Naturgesetze in allen dieselbe Form annehmen und dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle ist.

Lorentz – Transformation

Somit müssen wir nun Transformationsgesetze der klassischen Mechanik in Gesetze umwandeln die der relativistischen Betrachtungsweise genügen. Deshalb nehmen wir einfach an, dass die relativistischen Gleichungen für x bzw. x' bis auf einen Faktor γ auf der rechten Seite den klassischen Gleichungen entsprechen:

$$x' = \gamma(x - t \cdot v_x) \text{ bzw. die inverse Transformation } x = \gamma(x' + t' \cdot v_x)$$

Betrachten wir nun ein Lichtsignal, das im Ursprung von I zum Zeitpunkt $t = 0$ startet. Da wir oben angenommen haben, dass die Ursprünge von I und I' für $t = t' = 0$ zusammenfallen, startet der Lichtstrahl auch in I' bei $t' = 0$. Nach dem Einstein'schen Postulat breitet sich das Licht gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit aus. Somit muss für die x-Komponente in I $x = c \cdot t$ und für x'-Komponente in I' $x' = c \cdot t'$ gelten. Setzen wir dies nun in die Gleichungen ein, erhält man:

$$c \cdot t' = \gamma(c \cdot t - v_x \cdot t) = \gamma(c - v_x) \cdot t$$

und

$$c \cdot t = \gamma(c \cdot t' + v_x \cdot t') = \gamma(c + v_x) \cdot t' .$$

Multipliziert man nun beide Gleichungen miteinander, kommt man auf:

$$c^2 \cdot t' \cdot t = \gamma^2 \cdot (c - v_x) \cdot (c + v_x) \cdot t' \cdot t .$$

Nach Division durch $t' \cdot t$ erhält man:

$$c^2 = \gamma^2 \cdot (c - v_x) \cdot (c + v_x)$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c - v_x) \cdot (c + v_x)}$$

Aufgrund der Binomischen Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ gilt:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_x^{\;2}}$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 \cdot (1 - \frac{v_x^{\;2}}{c^2})}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^{\;2}}{c^2}}}}$$

Somit sind die Transformationsvorschriften für x und x' durch γ und die oben genannten Gleichungen gegeben.
Die Transformation für t und t' lässt sich durch die Kombination von $x = \gamma(x' + v_x \cdot t')$ und $x' = \gamma(x - v_x \cdot t)$ ermitteln. Setzt man x in x' ein erhält man:

$$x' = \gamma(\gamma(x' + v_x \cdot t') - v_x \cdot t) .$$

Vorbereitende Nebenrechnungen:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x{}^2}{c^2}}} = \frac{c}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v_x{}^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_x{}^2}}$$

$$y^2 = (\frac{c}{\sqrt{c^2 - v_x{}^2}})^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_x{}^2}$$

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{c^2}{c^2 - v_x{}^2} = \frac{c^2 - v_x{}^2 - c^2}{c^2 - v_x{}^2} = -\frac{v_x{}^2}{c^2 - v_x{}^2}$$

Beginn der Herleitung der Zeit-Transformation:

$$x' = \gamma(\gamma(x' + v_x \cdot t') - v_x \cdot t)$$

$$x' = \gamma^2 \cdot x' + \gamma^2 \cdot v_x \cdot t' - \gamma \cdot v_x \cdot t$$

$$(1 - \gamma^2) \cdot x' - \gamma^2 \cdot v_x \cdot t' = -\gamma \cdot v_x \cdot t$$

Nach einsetzen der Terme für γ, γ und $1 - \gamma^2$ erhält man:

$$-\frac{v_x{}^2}{c^2 - v_x{}^2} \cdot x' - \frac{c^2}{c^2 - v_x{}^2} \cdot v_x \cdot t' = -\frac{c}{\sqrt{c^2 - v_x{}^2}} \cdot v_x \cdot t$$

Die Division von $-\frac{c}{\sqrt{c^2 - v_x{}^2}}$ führt zu:

$$\frac{v_x{}^2 \cdot \sqrt{c^2 - v_x{}^2}}{c \cdot (c^2 - v_x{}^2)} \cdot x' + \frac{c^2 \cdot \sqrt{c^2 - v_x{}^2}}{c \cdot (c^2 - v_x{}^2)} \cdot v_x \cdot t' = v_x \cdot t$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a}{a^2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ist, gilt:

$$\frac{v_x{}^2}{c \cdot \sqrt{c^2 - v_x{}^2}} \cdot x' + \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_x{}^2}} \cdot v_x \cdot t' = v_x \cdot t$$

Nach Erweitern mit c im ersten Term erhält man:

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - {v_x}^2}} \cdot \frac{{v_x}^2}{c^2} \cdot x' + \frac{c}{\sqrt{c^2 - {v_x}^2}} \cdot v_x \cdot t' = v_x \cdot t$$

Da $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ist, gilt:

$$\gamma \cdot \frac{{v_x}^2}{c^2} \cdot x' + \gamma \cdot v_x \cdot t' = v_x \cdot t$$

Nach Division durch v_x ist

$$\gamma \cdot \frac{v_x}{c^2} \cdot x' + \gamma \cdot t' = t$$

Nun gilt für die Zeit-Transformation:

$$t = \gamma(t' + \frac{v_x}{c^2} \cdot x')$$

Somit lautet die relativistische Transformation der Koordinaten, also die Lorentz-Transformation:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + v_x \cdot t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + \frac{v_x}{c^2} \cdot x') \end{aligned}}$$ bzw. die inverse Transformation $$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v_x \cdot t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v_x}{c^2} \cdot x) \end{aligned}}$$ mit $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$.