Zur Masse - Energie - Äquivalenz

Der Ausgangspunkt ist das allgemeine Kraftgesetz, das hier nicht in der primitiven klassischen Form $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ verwendet wird, wo man m stets als konstant ansieht, sondern in der Form

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \ ,$$

d.h., die Kraft F wird als die zeitliche Ableitung des Impulses verstanden. Die Arbeit, welche die Kraft $F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{ds}{dt}\right)$ bei der Beschleunigung der Masse leistet, wird in (träge) Masse umgewandelt.

Die Berechnung der Arbeit $\int dW = \int F ds$ führt, wenn zunächst deren zeitliche Änderung $dW/dt = F ds/dt$ betrachtet wird, zu folgendem Ergebnis:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt},$$

also

$$\frac{dW}{dt} = \left[\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^3}}\beta\frac{d\beta}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2s}{dt^2}\right]\frac{ds}{dt} \quad ,$$

wobei

$$\frac{ds}{dt} = v = c\beta \quad \text{und} \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = c\frac{d\beta}{dt} \quad .$$

Damit ergibt sich

$$\frac{dW}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\beta c\beta}{1-\beta^2}\frac{d\beta}{dt} + c\frac{d\beta}{dt}\right)c\beta$$

oder

$$\frac{dW}{dt} = \frac{m_0 c^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1\right)\frac{d\beta}{dt}$$

und weiter

$$\frac{dW}{dt} = \frac{m_0 c^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d\beta}{dt} \ ,$$

also

$$\frac{dW}{dt} = m_0 c^2 \frac{\beta}{\left(\sqrt{1+\beta^2}\right)^3}\frac{d\beta}{dt} \ .$$

Um die Integration

$$W = m_0 c^2 \int \frac{\beta}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} d\beta$$

durchzuführen, wird

$$z = \sqrt{1-\beta^2}$$

eingeführt. Es ist

$$\frac{dz}{d\beta} = -\frac{2\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta}{z} ,$$

$$\beta d\beta = -zdz ,$$

also

$$-\int \frac{zdz}{z^3} = -\int \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{z} + C ,$$

$$W = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + C .$$

Die Integrationskonstante wird so bestimmt, dass sich für $v = 0$ bzw. $\beta = 0$ der Wert $W = 0$ ergibt.

$$0 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-0}} + C ,$$

$$C = -m_0 c^2 .$$

Somit erhält man schließlich

$$W = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) .$$

Das ist die ***kinetische Energie*** in relativistischer Form. Diese kann man demnach auch schreiben

$$E_{kin} = (m - m_0)c^2 ;$$

in Worten: kinetische Energie= Gesamtenergie - Ruhenergie. Der Satz von der Unveränderlichkeit (Konstanz) der Masse gilt demnach ***nicht*** wie in der Newtonschen Mechanik. Nur wenn die Energieänderungen verhältnismäßig klein sind, kann man die Massenänderungen vernachlässigen. Diese wichtige Beziehung ist experimentell völlig gesichert. Sie spielt in der Atom - und Kernphysik eine hervorragende Rolle. $\Delta m = E / c^2$ ist der allgemeinste Ausdruck für die Trägheit der Energie.
Die Formel für die klassische kinetische Energie ergibt sich als Spezialfall der relativistischen Formel für E_{kin} , indem man eine Reihenentwicklung durchgeführt:

$$E_{kin} = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] ,$$

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots - 1 \right] .$$

Für $v << c$ folgt

$$E_{kin} \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

Aus den Beziehungen für die kinetische Energie berechnet man z.B. auch die Geschwindigkeiten geladener Teilchen, deren kinetischer Energie gleich eU ist.
Aus der klassischen Formel

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$$

würde man

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m_0}U}$$

erhalten, die aber nur für $v << c$ Gültigkeit hat, da ja hier $m = m_0 = const$ gilt.
Man zeigt leicht, daß diese Formel z.B. bei Elektronen zu sinnlosen Resultaten führt: Als Zahlenwertgleichung schreibt man

$$\frac{v}{cms^{-1}} = 5{,}932 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{\frac{U}{Volt}}$$

und würde für $U \geq 10^6 Volt$ Geschwindigkeiten für die bewegten elektrischen Ladungsträger erhalten, die größer als die Vakuum - Lichtgeschwindigkeit wären. Das aber widerspricht der physikalischen Erfahrung.
Für Elektronengeschwindigkeiten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr zu vernachlässigen sind führt nur die allgemeingültige relativistische Beziehung zu Resultaten, die mit der Erfahrung übereinstimmen.
Zur Berechnung von v dient allgemein die Gleichung

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{mc^2}\right)^2} \quad .$$

Man findet für beliebige Teilchenarten:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_{kin}}\right)^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_{kin}}{m_0 c^2}\right)^2}}$$

Um eine Elektronengeschwindigkeit von $299999{,}9996 \frac{km}{s}$ zu erreichen benötigt man eine Beschleunigungsspannung von $ca \approx 10^{10} V$ und erhält dabei etwa die 19500 fache Ruhemasse eines Elektrons.