Relativistische kinetische Energie

Herleitung:

$$E_{kin} = \int_0^{v_E} \sum F ds = \int_0^{v_E} \frac{dp}{dt} ds = \int_0^{v_E} v dp = \int_0^{v_E} v d\left(\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \qquad (1)$$

Durch direktes Differenzieren ergibt sich / nach Quotientenregel:

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dv} \qquad (2)$$

$$= \frac{(m_0 \cdot v)' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - (m_0 \cdot v) \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)'}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - (m_0 \cdot v) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(- \frac{v}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (3)$$

Durch Ausklammern von m0 und Termzusammenfassung ergibt sich:

$$= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2} \right] = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad (4)$$

Es wurde somit gezeigt, dass: $d\left(\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dv$

Wenn man dieses in die Gleichung (1) einsetzt erhält man:

$$E_{kin} = \int_0^{v_E} v d\left(\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \int_0^{v_E} m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} v dv = m_0 \int_0^{v_E} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} v dv \qquad (5)$$

*Die Lösung des Integrals ergibt sich durch zu Hilfenahme der **Substitution**.*

Es gilt somit: $v^2 = z$ ➔ $dv = \frac{dz}{2v}$

$$E_{kin} = m_0 \int_0^{v_E} \left(1 - \frac{z}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot v \cdot \frac{dz}{2v} = \frac{1}{2} m_0 \int_0^{v_E} \left(1 - \frac{1}{c^2} z \right)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{1}{2} m_0 \left[-2 \cdot \left(1 - \frac{z}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{c^2}} \right]_0^{v_E} \qquad (6)$$

$$E_{kin} = \left| m_0 c^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_0^{v_E} \qquad (7)$$

Es folgt die Rücksubstitution: $z = v^2$

$$E_{kin} = \left| m_0 c^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_0^{v_E} = m_0 c^2 \cdot \left(1 - \frac{{v_E}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{1} \qquad (8)$$

Durch Ausklammerung des Quadrates der Lichtgeschwindigkeit ergibt sich:

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_E{}^2 / c^2}} - 1 \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_E{}^2 / c^2}} - m_0 c^2$$

$$\boxed{\textit{Ruheenergie: } E_0 = m_0 c^2}$$

Relativistische kinetische Energie: Wird ein Körper beschleunigt , so beträgt seine kinetische Energie $E_{kin} = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$.

Allgemein ist jedoch $v_E = v$.

Dieser Ausdruck der kinetischen Energie besteht aus zwei Termen. Der erste Term ist abhängig von der Geschwindigkeit des Massepunktes ab, während der zweite Term $m_0 c^2$, unabhängig von der Geschwindigkeit ist und **Ruheenergie** E_0 des Massenpunktes heißt.

Als **relativistische (Gesamt-) Energie** wird die Summe aus kinetischer und Ruheenergie definiert.

Relativistische Energie: $E = E_{kin} + m_0 c^2 = \dfrac{m_0 c_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m' c^2$