Die relativistische Massenveränderlichkeit

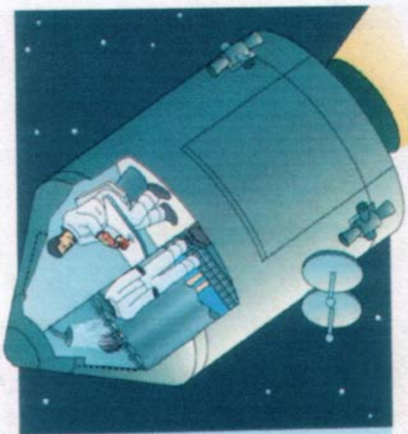
Die Relativistische Massenzunahme

- Wird ein Körper beschleunigt, so wirkt eine Kraft auf ihn.
- Weiterhin ist bekannt, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit ist

Frage: Ist es nun möglich die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten, wenn man ständig einem System Energie in Form einer Beschleunigung zu führt?

1. *Versuch „Raketenbeispiel“*

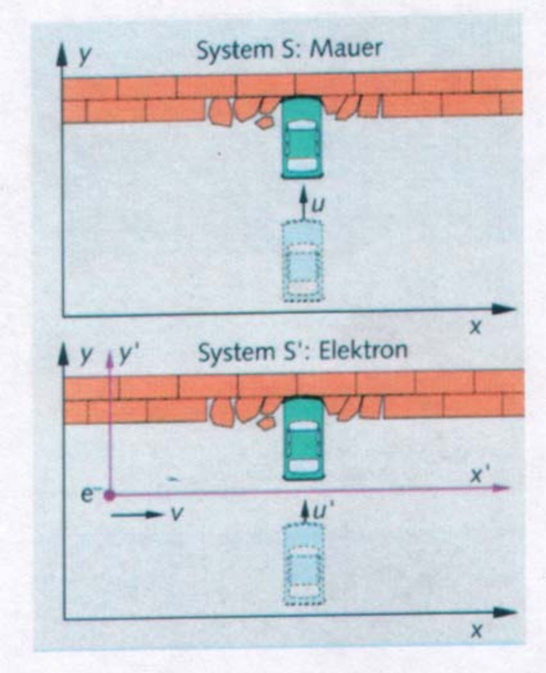
- eine Raumkapsel, die durch einen Raketenantrieb die konstante Beschleunigung $a = 10\ m*s^{-1}$
- in ihr werden alle Dinge die eine bestimmte Masse besitzen wie auf der Erde zu Boden gedrückt, so dass der Raumfahrer wie auf der Erde leben könnte
- nach einem Jahr würde das beschleunigt bewegte Raumschiff die Lichtgeschwindigkeit überschreiten



In einem mit $a = 10\ m \cdot s^{-2}$ beschleunigten Raumschiff leben die Raumfahrer wie auf der Erde.

Frage: Ist dies mit den Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie in Einklang zu bringen?

2. *Gedankenexperiment „Auto stößt gegen eine Mauer“*



- Vorgang sei ein vollständig unelastischer Stoß zweier Körper, es gilt der Impulserhaltungssatz: „In einem abgeschlossenen System von Massepunkten ist der Gesamtpuls des Systems konstant.“
- Aus der Sicht des System (S) = Mauer:
  Impuls des Autos nach der klassischen Mechanik $p = m \cdot v$ der Masse ***m*** mit der Geschwindigkeit ***v***.
- Aus der Sicht des System (S') = bewegtes Elektron
  Elektron bewegt sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der y'-Achse
  ➔ deshalb – bezogen auf S' - keine Längenkontraktion
- Beobachter in S' registriert den gleichen Impuls $p' = p$, weil für ihn dieselbe Wirkung auftritt (Stoss)
- Es gilt der Impulssatz: $m \cdot v = m' \cdot v'$
- Für die Geschwindigkeit ***v*** im System S gilt: $v = \frac{s}{t}$
- Für die Geschwindigkeit ***v'*** im System S' gilt: $v' = \frac{s'}{t'}$
- Weil keine Längenkontraktion auftritt ergibt sich: $ds = ds'$
- Vom Standpunkt des System S' tritt jedoch eine Zeitdilatation auf, weswegen sich das Auto für den Betrachter ganz langsam auf die Wand zu bewegt.
- Die Zeitdilatation berechnet sich durch: $t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$
- Daraus folgt, dass $t' > t$ ist und somit $v' < v$. Aus der Gleichung $m \cdot v = m' \cdot v'$ und $v' < v$ folgt zwingend $m' > m$

- Es soll nun m’ berechnet werden:

$$m \cdot v = m' \cdot v' \;\Rightarrow\; m' = m \cdot \frac{v}{v'} = m \cdot \frac{\frac{s}{t}}{\frac{s'}{t}} = m \cdot \frac{t'}{t} = m \cdot \frac{t}{t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma$$

Man bezeichnet die Masse m oder auch m_0 als **Ruhemasse**, m' ist die **dynamische Masse** des
bewegten Körpers. Wenn man ständig eine beschleunigende Kraft auf den Körper wirken lässt, so setzt der Körper mit größer werdender Geschwindigkeit der Kraft einen immer größer werdenden Widerstand entgegen, d.h. seine Trägheit wird größer. Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten lassen sich m_0 und m' praktisch nicht voneinander unterscheiden.
Wenn jedoch v in die Region der Lichtgeschwindigkeit c kommt, verhält sich der Körper so, als ob er eine größere Masse hätte.
Daraus folgt deshalb, dass der klassische Ausdruck des Impuls nur eine Näherung ist.

Der relativistische Impuls:

$$p = m'v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma \cdot v$$

Relativistische Massenzunahme: Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit *v*, so beträgt seine dynamische bzw. relativistische Masse *m’*:

$m' = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma$. Hierbei ist m_0 die Ruhemasse.

Bsp.: Man betrachte das Super-Protonensynchrotron (SPS) im Cern, dem europäischen Zentrum für Teilchenphysik. Dort beschleunigt man Protonen durch elektrische Felder auf nahezu Lichtgeschwindigkeit ($v = 0{,}99999726 \cdot c$ *). Während der Beschleunigung legen die Protonen mehr als eine Million Kilometer im kreisförmigen SPS zurück. Ein Magnetfeld der Stärke B hält sie auf der Kreisbahn . Die erforderliche magnetische Feldstärke soll berechnet werden.*

<u>Vergleich:</u>

Gegeben:

$$m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$$
$$v = 0{,}99999726 \cdot c$$
$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$$
$$r = 1200m$$

Gesucht: B

Nach der Newtonschen Physik

$$B = \frac{m_0 \cdot v}{e \cdot r} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1200m} = 0{,}0026T$$

Demnach würden also bereits schwache Elektromagnete ausreichen, um die Teilchen auf der Bahn zu halten.

Die relativistische Massenzunahme bewirkt jedoch, dass die Masse der Protonen während der Beschleunigung ansteigt:

$$B = \frac{m' \cdot v}{e \cdot r} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{e \cdot r} = \gamma \frac{m_0 \cdot v}{e \cdot r} = 427 \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1200m} = 1{,}11T$$

Diese hohe elektronische Feldstärke kann nur durch sehr starke Elektromagnete erzielt werden. Die relativistische Massenzunahme muss demnach beim Bau von Teilchenbeschleunigern berücksichtigt werden.

Frage: Was passiert bei der Beschleunigung des Teilchens in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit
mit der zugeführten Energie?