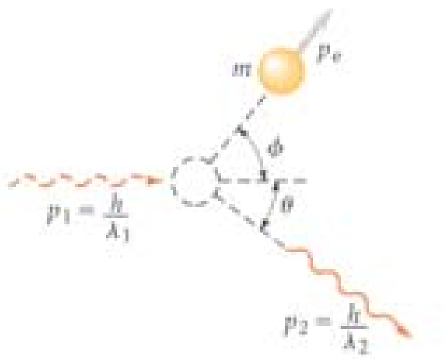
Die Compton-Streuung oder der Comptoneffekt

Ein weiterer Hinweis auf den Teilchencharakter von Licht, also auf die Richtigkeit des Photonenbildes, geht auf **Arthur H. Compton** zurück. Er untersuchte in seinen Experimenten die **Streuung von Röntgenstrahlen** an freien Elektronen.
Nach der klassischen Theorie regt eine elektromagnetische Welle der Frequenz f_1, die auf Ladungen trifft, diese zu Schwingungen derselben Frequenz an.
Die schwingenden Ladungen emittieren daraufhin wiederum elektromagnetische Strahlung derselben Frequenz f_1.
Compton zeigte **1922**, dass die Elektronen bei der Streuung einen Rückstoß erleiden und daher Energie absorbieren. Bei der Interpretation seiner Ergebnisse ging er davon aus, dass bei dem Streuprozess jeweils ein Photon mit einem Elektron wechselwirkt. Das Photon besitzt dann nach einem solchen Stoß eine geringere Energie und daher auch eine niedrige Frequenz als vor dem Stoß.



35.9 Compton-Streuung eines Röntgenstrahls an einem Elektron. Das gestreute Photon besitzt wegen des Rückstoßes des Elektrons eine geringere Energie, d.h. eine größere Wellenlänge, als das einfallende Photon. Die Wellenlängendifferenz läßt sich aus der Energie- und Impulserhaltung berechnen.

Nach der klassischen Theorie des Elektromagnetismus gilt für die **Energie** einer elektromagnetischen Welle:

Photon: vor dem Stoß: (1) $E = hf_1$;

Nach dem Stoß: (2) $E = hf_2$ für das

Elektron: vor dem Stoß: (3) $E = mc^2$;

Nach dem Stoß: (4) $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$.

Für den **Impuls** eines Photons und eines Elektrons gilt:

Photon: vor dem Stoß: (5) $p_1 = \frac{hf_1}{c}$ aus $E = pc$;

Nach dem Stoß: (6) $p_2 = \frac{hf_2}{c}$.

Elektron: vor dem Stoß: (7) $p = 0$;

Nach dem Stoß: (8) $p_e = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Bei diesem Versuch macht nur verwendete Röntgenstrahlung Sinn, da eine Frequenzverschiebung nur für sehr kurzwellige Strahlung festzustellen ist. Gleichzeitig gilt jedoch die spezielle Relativitätstheorie.

Für die Masse, den Impuls und die Energie lassen sich folgende Gleichungen finden:

(9) $E_0 = m_0 \cdot c^2$,

(10) $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,

(11) $v = v_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$,

(12) $p = mv_0 = m \cdot \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

Somit gilt durch Herleitung aus den Gleichungen (9)-(12) der Zusammenhang zwischen der Energie und dem Impuls

(13) $E = pc$.

Herleitung:

Aus (12) folgt: (14) $m_0 = \frac{p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}$.

Aus (9) und (14) folgt: (15) $E_0 = \frac{p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot c^2}{v} \Rightarrow pc = \frac{E_0 \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Aus (15) folgt: (16) $pc = \frac{E_0 v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Die Gleichung (15) wird jetzt quadriert.

Daraus folgt: (17) $p^2 c^2 = \frac{E_0^2 \cdot v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$.

Die Gleichung (10) wird quadriert und von der Gleichung (17) subtrahiert.

Daraus folgt: (18) $E^2 = \dfrac{E_0^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}$.

Daraus folgt: (19) $p^2c^2 - E^2 = \dfrac{E_0^2 \cdot v^2}{c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} - \dfrac{E_0^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} = \dfrac{E_0^2 \cdot v^2 - E_0^2 \cdot c^2}{c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} = \dfrac{\left(v^2-c^2\right)E_0^2}{c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}$.

Daraus folgt: (20) $p^2c^2 - E^2 = \dfrac{-\left(c^2-v^2\right)}{c^2} \cdot \dfrac{E_0^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} = -\dfrac{\dfrac{c^2-v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v}{c^2}} \cdot E_0^2 = -E_0^2$.

Daraus folgt: (21) $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$.

Damit liefert die spezielle Relativitätstheorie für die relativistische Energie des freien Teilchens nach dem Stoß:

(22) $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$ oder (4)

(23) $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$.

Den Impulssatz werten wir mit Hilfe des Kosinussatzes aus:

(24) $p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\vartheta)$.

(25) $p_e^2 = \dfrac{h^2}{c^2}\left(f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2\cos(\vartheta)\right)$

Für den Energieerhaltungssatz gilt:

(26) $hf_1 + mc^2 = hf_2 + \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$

(27) $\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} - mc^2 = hf_1 - hf_2 \Rightarrow \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = hf_1 - hf_2 + mc^2$.

Der Energieerhaltungssatz (27) wird quadriert. Das Ergebnis lautet:

(28) $c^2p^2 + m^2c^4 = h^2f_1^2 + h^2f_2^2 + m^2c^4 - 2h^2f_1f_2 + 2hf_1mc^2 - 2hf_2mc^2$.

(29) $c^2p^2 = h^2f_1^2 + h^2f_2^2 - 2h^2f_1f_2 + 2hf_1mc^2 - 2hf_2mc^2$

Der Impulserhaltungssatz wird mit c^2 erweitert und lautet dann:

(30) $c^2p_e^2 = h^2\left(f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2\cos(\vartheta)\right)$.

Danach erfolgt die Subtraktion des Impulserhaltungssatzes vom Energieerhaltungssatz.

(31) $0 = h^2f_1^2 + h^2f_2^2 - 2h^2f_1f_2 + 2hf_1mc^2 - 2hf_2mc^2 - h^2f_1^2 - h^2f_2^2 + 2h^2f_1f_2\cos(\vartheta)$

(32) $0 = -2h^2f_1f_2 + 2hf_1mc^2 - 2hf_2mc^2 + 2h^2f_1f_2\cos(\vartheta)$

(33) $0 = h^2\left(-2f_1f_2 + 2f_1f_2\cos(\vartheta)\right) + 2mc^2h\left(f_1 - f_2\right)$

(34) $0 = -2h^2f_1f_2\left(1-\cos(\vartheta)\right) + 2hmc^2\left(f_1 - f_2\right)$

(35) $0 = -2h^2\left(1-\cos(\vartheta)\right) + 2hmc^2\dfrac{\left(f_1 - f_2\right)}{f_1f_2}$.

Das führt mit:

(36) $$\frac{(f_1 - f_2)}{f_1 f_2} = \frac{\frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2}}{\frac{c^2}{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{1}{c}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

auf die folgende Wellenlängenveränderung des gestreuten Photons

(37) $$0 = -2h^2(1 - \cos(\vartheta)) + 2hmc^2 \frac{1}{c}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

(38) $$0 = -h(1 - \cos(\vartheta)) + mc(\lambda_2 - \lambda_1)$$

(39) $$\frac{h}{mc}(1 - \cos(\vartheta)) = (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta\lambda$$

(40) $$\lambda_c(1 - \cos(\vartheta)) = (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta\lambda$$ mit

(41) $$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2{,}4263 \cdot 10^{-2} \overset{0}{A}$$ (Angström) als „Compton-Wellenlänge“.

Damit ist der Ausgangspunkt der Veränderung der Frequenz des Photons gezeigt und kann auch experimentell bestätigt werden. Der Comptoneffekt ist ein weiteres Indiz für den Teilchencharakter des Lichtes und dient als Unterstützung des Photonenmodell nach Einstein