<u>Die heisenbergsche Unschärferelation</u>

Es gilt zu untersuchen, welche Auswirkungen die Welleneigenschaften massenbehafteter Teilchen auf Messungen ihres Ortes, ihres Impulses und ihrer Energie haben.
Wir betrachten dazu ein Teilchen, ein Elektron, das durch eine Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben wird.
Nach dem experimentellen Nachweis über Interferenzbilder bei der Beugung von Elektronen und der experimentellen Bestimmung der de Brogliewellenlänge, stellt sich die Frage nach dem eigentlichen Sinn dieser Wellenpakete bzw. Wellen, die anscheinen gar keine richtigen Wellen im Sinne der klassischen Mechanik darstellen.
Welche besonderen Eigenschaften der Mikroobjekte verbergen sich hinter jenen eigenartigen Wellenstrukturen?

In Analogie zur Lichtbeugung haben wir die bei Elektronen in entsprechenden experimentellen Situationen in Erscheinung tretenden Wellenmuster als „***Elektronenbeugung***" interpretiert.
Um eine erste Antwort auf die drängende Frage zu finden, wollen wir diese optische **Analogie** weiter nutzen.

Fällt ein Lichtbündel der Wellenlänge λ auf einen Spalt der Breite Δx, dann beobachtet man auf einen Schirm die bekannte Intensitätsverteilung.
Die Lage der Nullstellen der Intensität ist durch die Gleichung

$$\sin(\alpha) = n\frac{\lambda}{\Delta x} \quad \text{mit } n = 1,2,3,...$$

gegeben.

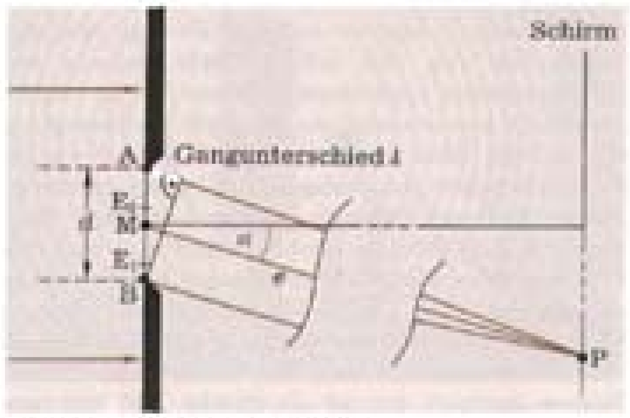


Abb. 556.2 Zur Beugung am Spalt

Die Intensität der Hauptmaxima übertrifft die der Nebenmaxima beträchtlich. Sein Bereich ist durch die Lage der ersten Minima für $n = 1$ bestimmt. Es gilt daher die Beziehung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

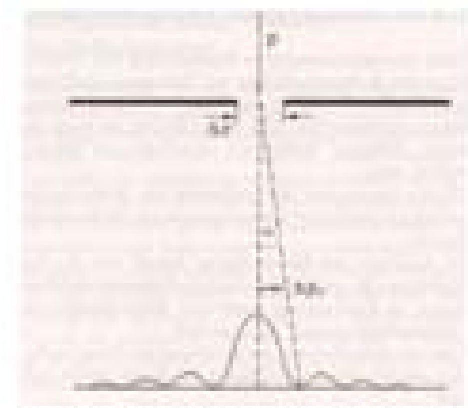
Lassen wir ein Elektronenbündel auf einen sehr engen Spalt fallen, so zeigt sich eine analoge Intensitätsverteilung, für die dann ebenfalls $\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{\Delta x}$ gilt.

Setzt man jetzt für die Wellenlänge die de Brogliebeziehung $\lambda = \frac{h}{p}$ in die Gleichung

$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{\Delta x}$ ein, so ergibt sich:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{p\Delta x}.$$

Wie lässt sich dieser Zusammenhang deuten?
Vor dem Durchgang des Elektronenbündels durch den Spalt haben alle Elektronen einen scharfen, d.h. genau bestimmbaren Impuls *p*. Wird das Bündel auf die Spaltbreite Δx begrenzt, dann gibt die Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{h}{p\Delta x}$ an, welche Chance das Elektron hat, in den Bereich des ersten Maximums zu fallen. Bei Einengung oder „Lokalisierung“ der Elektronen auf eine „Ortsunschärfe“ Δx ist der Impuls p nicht mehr „scharf“.
Im Bereich des ersten Maximums streut er um den Betrag Δp_x. Wie man aus der nachfolgenden Abbildung erkennt,



ist die „Impulsunschärfe“ mindestens $p \cdot \sin\alpha$. Daher können wir schreiben:

$$\Delta p_x \geq p \cdot \sin\alpha .$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich zusammen mit $\sin(\alpha) = \frac{h}{p\Delta x}$ für das Produkt aus Ortsunschärfe Δx und Impulsunschärfe Δp_x:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \text{ oder bezüglich der Energie } \Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

Man bezeichnet diese Beziehung als **heisenbergsche Unschärferelation**.

*Die **heisenbergsche Unschärferelation** besagt, dass es nicht möglich ist, gleichzeitig Ort und Impuls eine Mikroobjektes beliebig genau (scharf) zu bestimmen..*