Wellenpakete (für interessierte Schüler)

In diesem zusätzlichen Abschnitt gehen wir etwas genauer auf die klassische Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

und auf deren Lösungen ein. Insbesondere untersuchen wir aus harmonischen wellen aufgebaute Wellenpakete und übertragen unsere Ergebnisse auf die Wellenfunktion von Elektronen.
Es sei durch vorangegangene Betrachtungen bekannt, dass die harmonische Welle beschreibende Wellenfunktion der Form

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega\, t)$$

eine Lösung der o.g. Differentialgleichung ist.
Darin bezeichnet ***k*** die Wellenzahl, die mit der Wellenlänge λ über die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

verknüpft ist, und ω die Kreisfrequenz, die mit der Frequenz *f* in Beziehung

$$\omega = 2\pi f$$

steht. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit *v* der Welle, ihre Frequenz *f* und Wellenlänge λ gilt folgende Relation:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda\,.$$

Oft wird für eine harmonische Welle an Stelle der reellen Wellenfunktion die komplexwertige Wellenfunktion

$$y(x,t) = A\cdot e^{i(kx-\omega\, t)}$$

verwendet.
Durch Einsetzen der zweiten partiellen Ableitungen von $y(x,t) = A\cdot e^{i(kx-\omega\, t)}$ in $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$ lässt sich zeigen, dass diese komplexwertige Funktion ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung ist. Alternativ dazu lässt sich $y(x,t) = A\cdot e^{i(kx-\omega\, t)}$ auch nach der Identität

$$\cdot\, e^{i(kx-\omega\, t)} = \cos(kx - \omega\, t) + i\sin(kx - \omega\, t)$$

in Real- und Imaginärteil zerlegen.
Es lässt sich sofort erkennen, das der Realteil mit der reellen Lösung $y(x,t) = A\cos(kx - \omega\, t)$ übereinstimmt. Aber auch der Imaginärteil erfüllt die Wellengleichung, und damit ist $y(x,t) = A\cdot e^{i(kx-\omega\, t)}$ eine mögliche Lösung.
Die komplexwertige Wellenfunktion erscheint zunächst unnötig kompliziert, sie erleichtert Rechnungen jedoch oft erheblich.
Man muss sich jedoch darüber im klaren sein, dass als Lösung der klassischen Wellengleichung immer nur der Realteil der komplexen Wellenfunktion eine physikalische Bedeutung besitzt.

Die durch die Wellenfunktion beschriebenen harmonischen wellen besitzen eine Gemeinsamkeit: Sie sind räumlich und zeitlich unendlich ausgedehnt. Damit ist ein durch $y(x,t) = A \cdot e^{i(kx-\omega t)}$ beschriebenes Teilchen jedoch nicht lokalisiert.

Bildet man nämlich das Betragsquadrat der Wellenfunktion, das nach $P(x) = |\Psi_{norm}|^2$ proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens ist, so ergibt sich eine Konstante:

$$|\Psi_{norm}|^2 = \Psi^* \Psi = A^2 \cdot e^{-i(kx-\omega t)} e^{i(kx-\omega t)} = A^2 = konst.$$

Das Teilchen ist also zu jedem Zeitpunkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Ort.
Zur Beschreibung eines lokalisierten Teilchens reicht eine einzelne harmonische Welle mit einer einzigen Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k daher nicht aus.
Wie man später sehen wird, benötigt man statt dessen ein **Wellenpaket aus harmonischen Wellen** mit einer kontinuierlichen Verteilung von Frequenzen und Wellenzahlen.
Um die Eigenschaften von Wellenpaketen zu untersuchen, beschränken wir uns auf ein sehr einfaches, nur aus zwei harmonischen Wellen bestehendes Wellenpaket.
Die beiden Wellen besitzen verschiedene Frequenzen und Wellenzahl, aber gleiche Amplitude.
Wir bezeichnen die Wellenzahlen mit k_1 und k_2, die Kreisfrequenzen mit ω_1 und ω_2 und die Amplitude mit A_0.
Unser Wellenpaket $\Psi(x,t)$ nimmt dann folgende Form an:

$$\Psi(x,t) = A_0 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + A_0 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}.$$

Wenn wir die Beziehung $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ und $e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$ benutzen, können wir diese Gleichung in

$$\Psi(x,t) = A_0 \exp i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cdot \left[\exp\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) + \exp\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right]$$

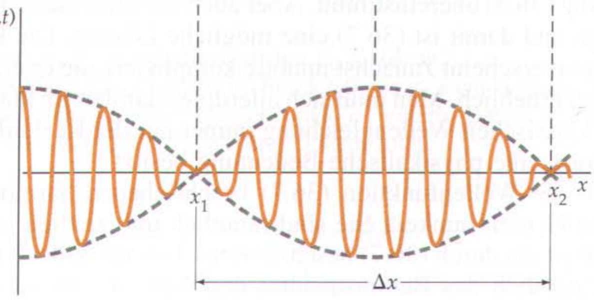
$$= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \cdot \exp i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

umformen.
Wir definieren eine mittlere Wellenzahl $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ und eine mittlere Kreisfrequenz $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ und schreiben $\Delta k = (k_1 - k_2)$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)$ für die auftauchenden Differenzen zwischen den Wellenzahlen und Frequenzen. Dann gilt:

$$\Psi(x,t) = \left[2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\right] \cdot e^{i(kx-\omega t)}.$$

In der nachfolgenden Abbildung ist das Wellenpaket $\Psi(x,t)$ in Abhängigkeit vom Ort x zu einem festen Zeitpunkt aufgetragen.

36.4 Ein aus nur zwei Wellen gebildetes Wellenpaket. Die räumliche Ausdehnung Δx des Wellenpakets ist umgekehrt proportional zur Differenz Δk der Wellenzahlen. Trägt man $\Psi(x,t)$ für einen festen Ort x über der Zeit auf, so ergibt sich dasselbe Bild. In diesem Fall ist die zeitliche Ausdehnung Δt umgekehrt proportional zur Differenz $\Delta\omega$ der Kreisfrequenzen.



Die gestrichelte Linie stellt die Einhüllende des Wellenpakets dar, die durch den in

$\Psi(x,t) = \left[2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\right] \cdot e^{i(kx-\omega t)}$ in eckigen Klammern stehenden Term gegeben

ist. Diese bewegt sich mit der sog. Gruppengeschwindigkeit $v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

Der komplexe Anteil des Wellenpakets beschreibt eine sich mit der sog.

Phasengeschwindigkeit $v_P = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}}$ ausbreitende harmonische Welle.

Für eine kontinuierliche Verteilung harmonischer Wellen in einem Wellenpaket nimmt die

Gruppengeschwindigkeit die Form $v_G = \frac{d\omega}{dk}$

an.

Die Energie und der Impuls eines Teilchens stehen durch die de Broglie Gleichungen mit der Frequenz und der Wellenlänge und damit mit der Kreisfrequenz und der Wellenzahl der entsprechenden Wellenfunktion des Teilchens in Beziehung.

Es gilt:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{2\pi}{k}} = \hbar k$$

und

$$E = hf = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega \, .$$

Die kinetische Energie eines sich kräftefrei bewegenden Teilchens beträgt

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \, .$$

Ersetzen wir E_{kin} durch $E = \hbar\omega$ und p durch $p = \hbar k$, so ergibt sich

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \, .$$

Für die durch $v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ gegebene Gruppengeschwindigkeit folgt damit

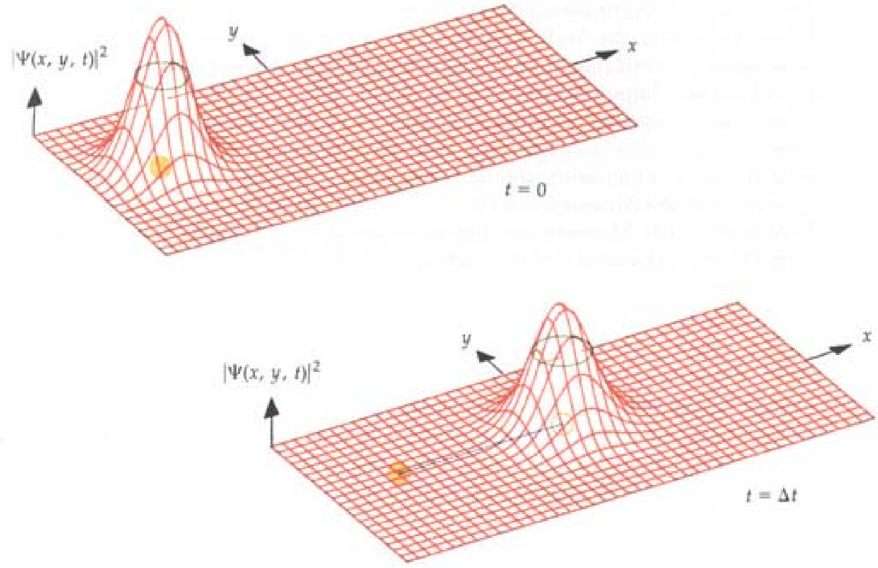
$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v\,.$$

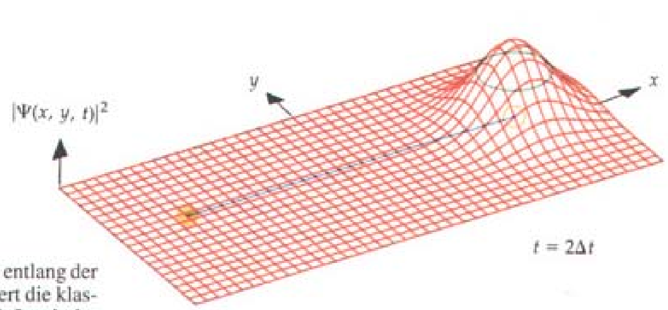
Die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes stimmt also mit der Geschwindigkeit des Teilchens überein.

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da die Gruppengeschwindigkeit nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der Einhüllenden der Wellenfunktion und damit auch der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens.

Die Phasengeschwindigkeit v_P der einzelnen Wellen stimmt dagegen nicht mit der Geschwindigkeit des Teilchens überein:

$$v_P = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}\,.$$





Das dreidimensionale Wellenpaket beschreibt ein sich entlang der x-Achse bewegendes Teilchen. Der gelbe Kreis markiert die klassische Position des Teilchens. Das Wellenpaket zerfließt mit der Zeit, da es aus Wellen verschiedener Phasengeschwindigkeit zusammengesetzt ist. (Die Abbildungen wurden unter Zuhilfenahme eines Computerprogramms erzeugt, das dem Buch S. Brandt, H.D. Dahmen, *Quantum Mechanics on the Personal Computer*, Springer, Heidelberg 1989, beiliegt.)