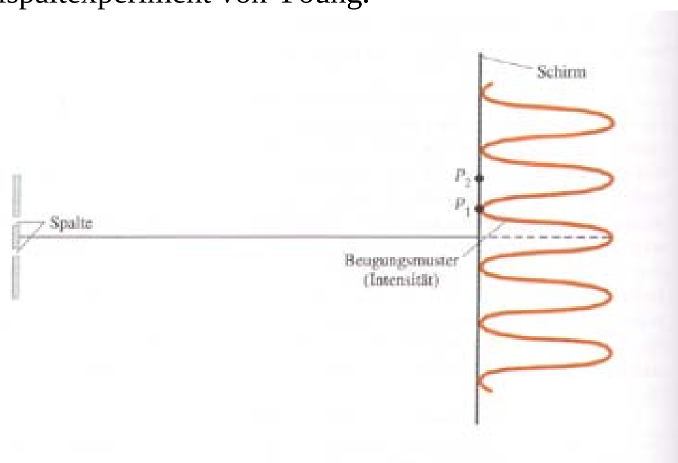
Wellenfunktionen von Teilchen

Nach der klassischen Theorie des Elektromagnetismus beschreibt man Licht durch seine Welleneigenschaften, es zeigt aber auch Teilchencharakter. Diese zweifache Beschreibungsweise – Welle und Teilchen – ist nicht auf Licht beschränkt, sie gilt auch für massenbehaftete Teilchen wie z.B. Elektronen.
De Broglies Idee von den Welleneigenschaften der Teilchen wurde von **Erwin Schrödinger** in einer detaillierten ***mathematischen Theorie*, der Quantenmechanik**, ausgearbeitet.
In dieser Theorie werden Teilchen durch Wellenfunktionen beschrieben, die der sog. **Schrödinger-Gleichung** genügen.

Wellenfunktion von Teilchen

Die Untersuchung klassischer Wellen ergab, dass sich diese durch Wellenfunktionen beschreiben lassen, die eine partielle Differentialgleichung, die sog. Wellengleichung erfüllen. Für eine elektromagnetische Welle stellt das elektrische (magnetische) Feld eine solche Funktion dar.
Da die Energiedichte in einer elektromagnetischen Welle proportional zum Quadrat der Wellenfunktion ist, ist auch die als Produkt aus Energiedichte und Ausbreitungsgeschwindigkeit definierte Intensität einer Welle proportional zum Quadrat der Wellenfunktion.
In der Quantenmechanik wird ein Teilchen, wie z.b. das Elektron, durch eine Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben, die der von Erwin Schrödinger im Jahr **1926** formulierten Wellengleichung genügt.
Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ lässt sich nicht direkt mit einer physikalischen Größe in Verbindung bringen, eine Untersuchung der Energiequantisierung in elektromagnetischen Wellen gibt jedoch einen Hinweis auf eine mögliche Interpretation.

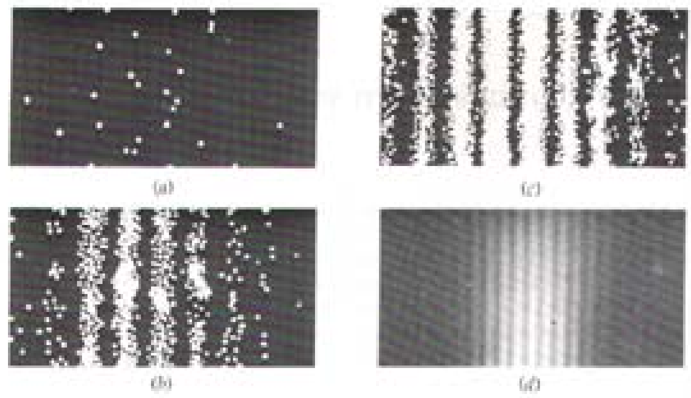
Wir betrachten hierzu das Doppelspaltexperiment von Young.



36.1 Das Doppelspaltexperiment von Young. Im Punkt P_2 treffen viele, im Punkt P_1 dagegen gar keine Photonen auf den Schirm. Bei sehr kleinen Intensitäten erreichen nur noch vereinzelt Photonen den Schirm. Die Intensitätsverteilung ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon auf eine bestimmte Stelle trifft.

Das auf dem Schirm beobachtete Muster wird in der klassischen Theorie der elektromagnetischen Wellen mit der Interferenz von Wellen erklärt, die von den beiden

Spalten ausgehen: An einem Punkt P_1 auf dem Schirm, in dem diese eine Phasenverschiebung $n\pi$ besitzen, ist das resultierende elektrische Feld E und damit die Energiedichte gleich null, und der Schirm bleibt dunkel. In einem anderen Punkt P_2, indem die Phasendifferenz $2n\pi$ beträgt, ist E maximal, und die Stelle auf dem Schirm erscheint mit maximaler Helligkeit. Wird die Intensität des Lichtes reduziert, so kann man immer noch dasselbe Interferenzmuster beobachten, wenn man den Schirm durch einen photografischen Film ersetzt und diesen über einen längeren Zeitraum belichtet.
Bei kurzer Belichtungszeit zeigt sich dagegen kein schwächeres Interferenzmuster (was man nach der klassischen Theorie erwarten würde), sondern ein aus einzelnen Punkten zusammengesetztes Bild.



36.2 Aufbau eines Interferenzmusters beim Doppelspaltexperiment. Die Abbildung ist durch Interferenz von a) 30 Photonen, b) 1000 Photonen und c) 10000 Photonen entstanden. d) zeigt ein Interferenzmuster, das von einigen Millionen Elektronen gebildet wurde. Die Photonen- und Elektronenmuster sind einander äquivalent. (Fotos: a, b, c: E. R. Huggins, d: C. Jönsson)

Unter der Annahme, dass die Energie der elektromagnetischen Welle der Frequenz f in Photonen der Energie hf quantisiert ist, lässt sich dieses Ergebnis einfach interpretieren.

<u>Ergebnisinterpretation</u>

Da die Intensität bzw. die Energiedichte der Welle proportional zu E^2 ist und ein Photon nur die Energie hf trägt, erwartet man eine zu E^2 proportionale, räumlich verteilte Photonendichte. Ist die Intensität gering und die Belichtungszeit sehr kurz, so treffen nur wenige Photonen auf den Film und erzeugen dort das beobachtete Punktmuster.
An den Punkten destruktiver Interferenz treffen keine Photonen auf den Film, an den Stellen konstruktiver Interferenz beobachtet man dagegen ein deutlich häufigeres Auftreten, und die Verteilung der Photonen weist zufällige Abweichungen von der klassischen vorhergesagten auf.
Wird die Intensität des Lichtes erhöht, oder die Belichtungszeit des Films vergrößert, so steigt die Zahl der mit dem Film wechselwirkenden Photonen an, die zufälligen Schwankungen mitteln sich heraus, und die Verteilung der Photonen geht in die klassische Verteilung über. Daher beobachtet man auch bei kleinen Intensitäten oder kurzen Belichtungszeiten die korrekte mittlere Verteilung.
Da die räumlich verteilte Photonendichte zur Energiedichte und damit auch zum Quadrat der Wellenfunktion E proportional ist, lässt sich E^2 (bis auf einen sogenannten Normierungsfaktor) als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Photons in einem bestimmten Volumen definieren.
Man spricht auch von der **Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte** eines Photons.
Führt man das Doppelspaltexperiment mit Elektronen durch, so ergibt sich dasselbe Interferenzmuster wie beim Licht.

Da massenbehaftete Teilchen dieselben Interferenzerscheinungen wie Photonen zeigen, liegt es nahe, das Quadrat der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ (bis auf einen Normierungsfaktor N^2) als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$ eines Teilchens zu interpretieren.
In der Schrödingergleichung taucht jedoch die imaginäre Einheit $i^2 = -1$ auf. Die Wellenfunktionen $\Psi(x,t)$ sind daher nicht notwendigerweise reell, sondern können komplexe Werte annehmen.
Da eine Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl sein muss, ist die zu E^2 analoge Größe das Betragsquadrat der Wellenfunktion, $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$. Die zu $\Psi(x,t)$ konjugiert komplexe Wellenfunktion wird mit Ψ^* bezeichnet.
Sie geht aus Ψ hervor, indem man in ihr *i* durch $-i$ ersetzt.
Das räumliche Integral der Aufenthaltwahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens über den gesamten Raum muss den Wert **eins** ergeben, da sich das Teilchen irgendwo im Raum befindet.
Für den **Normierungsfaktor** N^2 gilt daher die folgende Bedingung:

$$\int_V P(x)dV = \int_V N^2|\Psi|^2 dV = N^2\int_V |\Psi|^2 dV = 1,$$

woraus

$$N = \frac{1}{\sqrt{\int_V |\Psi|^2 dV}}$$

folgt. Normiert man die Wellenfunktion, indem man sie mit dem (reellen) Faktor N multipliziert, $\Psi_{norm} = N\Psi$, so gilt $|\Psi_{norm}|^2 = N^2|\Psi|^2$ und daher folgender Satz:

Die *Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte* eines Teilchens ist gleich dem Betragquadrat seiner normierten Wellenfunktion:

$$P(x) = |\Psi_{norm}|^2.$$