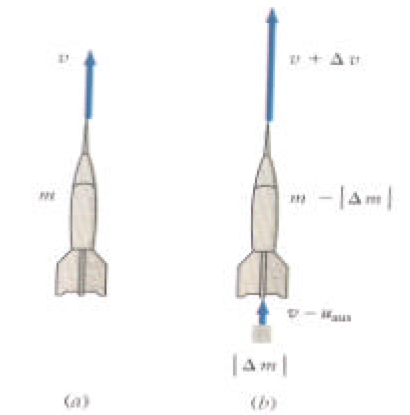
Der Raketenantrieb und die Raketengleichung
von Constantin Ziolkowski

Wir werden unter dieser Anwendung eine Gleichung entwickeln, die die Raketenbewegung beschreibt. Die Beschreibung ist kompliziert, weil sich die Raketenmasse kontinuierlich ändert, wenn die verbrannten Gase ausgestoßen werden.
Die einfachste Vorgehensweise besteht darin, die Impulsänderung des gesamten Systems während eines Zeitintervalls zu berechnen (wobei der Gasausstoß mit eingeschlossen ist) und dem Kraftstoß gleichzusetzen, der von äußeren Kräften auf das System ausgeübt wird.

Skizze:



7.29 a) Eine Rakete bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v. b) Nach einem Zeitintervall Δt hat die Rakete die Masse $m - |\Delta m|$ und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v + \Delta v$. Die Rakete mit der Geschwindigkeit v stößt Gas mit einer Relativgeschwindigkeit u_{aus} aus, so daß sich das Gas mit der Geschwindigkeit $v - u_{aus}$ bewegt. Die Impulsänderung des Systems aus Rakete und Abgas ist gleich dem Kraftstoß $F_{ext}\,\Delta t$.

$|\Delta m|$ Ausstoßgase

Es sei:

F_{ext} ... die resultierende äußere Kraft

v ... die Geschwindigkeit der Rakete relativ zur Erde zum Zeitpunkt t

m ... die Masse der Rakete einschließlich des verbrannten Treibstoffs

Zu einem späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ hat die Rakete Gas mit der Masse $|\Delta m|$ ausgestoßen.
Wir verwenden den Absolutbetrag, da die Masse des ausgestoßenen Gases den gleichen Betrag hat wie die Massenänderung der Rakete.
Die Rakete hat daher zur Zeit $t + \Delta t$ eine Masse von $m - |\Delta m|$ und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v + \Delta v$. Wenn das Gas mit einer Geschwindigkeit u_{aus} *relativ zur Rakete* Ausgestoßen wird, dann beträgt die Gasgeschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$ *relativ zur Erde* $v - u_{aus}$. Der Anfangsimpuls des Systems zur Zeit t ist:

$$p_a = mv.$$

Der Impuls des Systems zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist:

$$p_e = (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|(v - u_{aus})$$
$$p_e = mv + m\Delta v - v|\Delta m| - |\Delta m|\Delta v + v|\Delta m| - u_{aus}|\Delta m|.$$
$$p_e = mv + m\Delta v - u_{aus}|\Delta m|$$

Der Term $|\Delta m|\Delta v$ kann vernachlässigt werde, da er ein Produkt aus zwei sehr kleinen Größen ist.
Wenn man die Impulsänderung berechnet und gleich dem Kraftstoß setzt, erhält man

$$\Delta p = p_e - p_a = m\Delta v - u_{aus}|\Delta m| = F_{ext}\Delta t$$

Man dividiert nun die Gleichung durch das Zeitintervall und bildet den Grenzwert für $\Delta t \to 0$.
Der Term $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ geht dann gegen die Ableitung $\frac{dv}{dt}$, also die Beschleunigung, und der Term $\frac{|\Delta m|}{\Delta t}$ geht gegen $\frac{|dm|}{dt}$, den Absolutbetrag der differentiellen Massenänderung der Rakete.
Das liefert uns die **Raketengleichung:**

$$m\frac{dv}{dt} = u_{aus}\left|\frac{dm}{dt}\right| + F_{ext}.$$

Die Größe $u_{aus}\left|\frac{dm}{dt}\right|$ heißt Schubkraft oder kürzer Schub der Rakete:

$$F_{sch} = u_{aus}\left|\frac{dm}{dt}\right|.$$

Wenn sich die Rakete nahe der Erdoberfläche bewegt, dann entspricht die äußere Kraft F_{ext} der Gewichtskraft der Rakete (vernachlässigen den Luftwiderstand). Diese Kraft hat ein negatives Vorzeichen, da ihre Richtung der Richtung der Geschwindigkeit genau entgegengesetzt ist, vorausgesetzt, das sich die Rakete von der Erde wegbewegt. Der Schub der Rakete muss deshalb größer sein als das Gewicht der Rakete, wenn die Rakete nach oben beschleunigt werden soll.
Die Raketengleichung wird nach der Substitution $F_{ext} = -mg$ und nach Division durch m zu

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{u_{aus}}{m}\cdot\left|\frac{dm}{dt}\right|.$$

Um nach der Geschwindigkeit v auflösen zu können, müssen wir die Austrittsgeschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete und die Verbrennungsgeschwindigkeit, d.h. die differenzielle Massenänderung $\left|\frac{dm}{dt}\right|$, kennen. Die Lösung dieser Gleichung wird zudem dadurch verkompliziert, das die Masse nicht konstant ist, sondern eine Funktion der Zeit ist.
Wenn die Rakete den Treibstoff mit einer Rate $R = \left|\frac{dm}{dt}\right|$ verbrennt, dann beträgt die Masse der Rakete zu jedem Zeitpunkt $m = m_a - Rt$, wobei m_a´die Anfangsmasse ist.

Da $\frac{dm}{dt}$ negativ ist, schreiben wir $\left|\frac{dm}{dt}\right| = -\frac{dm}{dt}$. Die o.g. Gleichung wird dann zu:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u_{aus}}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

oder

$$dv = -g \cdot dt - u_{aus} \cdot \frac{dm}{m}.$$

Nehmen wir an, das g konstant ist, und integrieren von $t = 0$ bis $t = t_v$, dem Zeitpunkt, an dem der Treibstoff vollständig verbrannt ist, dann erhalten wir:

$$\int_{v_a}^{v_e} dv = -\int_0^{t_v} g dt - u_{aus} \int_{m_a}^{m_e} \frac{dm}{m},$$

$$v_e - v_a = -gt_v - u_{aus} \cdot \ln \frac{m_e}{m_a},$$

wobei wir $f\left(\frac{dm}{m}\right) = \ln(m)$ verwendet haben. Mit $-\ln\left(\frac{m_e}{m_a}\right) = \ln\left(\frac{m_a}{m_e}\right)$ erhalten wir:

$$v_e - v_a = +u_{aus} \ln \frac{m_a}{m_e} - gt_v.$$

Die Gleichung beschreibt die Änderung der Raketengeschwindigkeit in einem konstanten Gravitationsfeld als Funktion der Ausstoßgeschwindigkeit u_{aus},der Zeit t_v, bis der Treibstoff verbrannt ist, und dem Verhältnis von Anfangs- zu Endmasse. Wenn sich eine Rakete im freien Raum bewegt, ohne dass äußere Kräfte auf sie wirken, ändert sich ihre

Geschwindigkeit um

$$v_e - v_a = +u_{aus} \ln \frac{m_a}{m_e}$$ (keine äußeren Kräfte).

Die Masse der Rakete ohne Treibstoff heißt Nutzlast. Beträgt die Nutzlast nur 10 Prozent der gesamten Masse, bestehen also 90 Prozent der Anfangsmasse aus Treibstoff, dann ist das Massenverhältnis $\frac{m_a}{m_e} = 10$, wenn der gesamte Treibstoff verbraucht ist. Eine Rakete, die mit $v_a = 0$ bei Abwesenheit äußerer Kräfte startet, erreicht unter diesen Voraussetzungen eine Endgeschwindigkeit v_e von

$$v_e = u_{aus} \ln 10 = 2{,}3u_{aus}.$$

Der Logarithmus begrenzt die maximal erreichbare Endgeschwindigkeit. Bei einer Nutzlast von gerade 1 Prozent der Gesamtmasse, beträgt die Endgeschwindigkeit bei Abwesenheit äußerer Kräfte $4{,}6u_{aus}$, also gerade doppelt soviel wie bei einer Nutzlast von 10 Prozent.