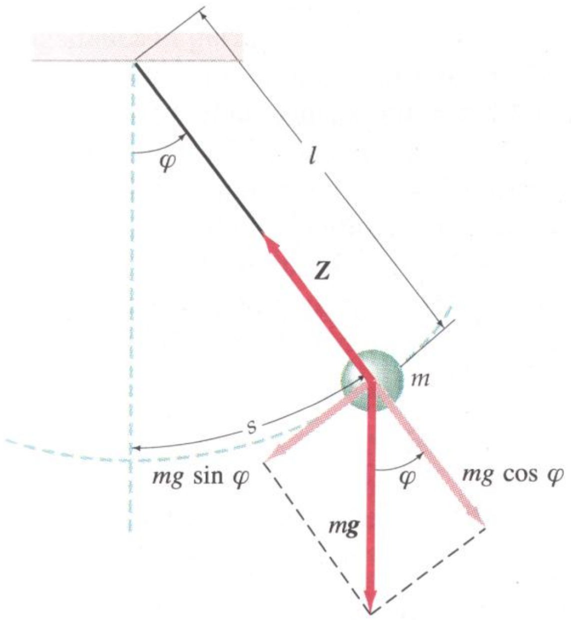
Das Mathematisches Pendel

Das Pendel ist ein vertrautes Beispiel für Schwingungsbewegungen. Es führt allerdings nur bei kleinen Auslenkungen harmonische Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus.



Die Abbildung zeigt ein Fadenpendel oder auch mathematisches Pendel der Länge l mit einer Kugel der Masse m. Ein mathematisches Pendel ist eine **Idealisierung**: *Eine punktförmige Masse hängt an einem masselosen Faden*. In der Praxis heißt das: *Der Faden ist möglichst lang und dünn, der angehängte Gegenstand ist möglichst schwer und möglichst wenig ausgedehnt*.
Auf die Kugel wirkt die Gewichtskraft ***mg*** und die Zugkraft ***Z***.
Schließt das Pendel den Winkel φ mit der Vertikalen ein, so wirkt die Zugkraft

$$Z = -mg \cdot \cos\varphi$$

entlang des Fadens und dazu senkrecht die Kraft $mg \cdot \sin\varphi$, die in tangentialer Richtung die Kugel zur Gleichgewichtslage zurücktreibt. Diese Kraft wird oftmals als „**rücktreibende Kraft**" bezeichnet.
Sei ***s*** die vom tiefsten Punkt aus gemessene Bogenlänge.
Sie berechnet sich aus dem Winkel φ näherungsweise über

$$s = l \cdot \varphi \qquad \textit{für kleine Winkel}\ .$$

Die Tangentialkomponente der Beschleunigung der Kugel ist $a \mathrel{\hat{=}} \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$. Nach dem zweiten newtonschen Axiom, $F = m \cdot a$, ist die Tangentialkomponente

$$-mg \cdot \sin\varphi = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot \ddot{s}$$

oder

$$\ddot{s} = -g \sin\varphi = -g \sin\frac{s}{l}\ .$$

Ist s viel kleiner als l, so ist auch der Winkel $\varphi = \frac{s}{l}$ und wir können $\sin\varphi$ durch den

Winkel φ näherungsweise selbst ersetzen. Setzen wir $\sin\left(\frac{s}{l}\right) \approx \frac{s}{l}$ in die Gleichung

$\ddot{s} = -g \sin\varphi = -g \sin\frac{s}{l}$ ein, erhalten wir

$$\ddot{s} = -\frac{g}{l} s .$$

Für kleine Winkel, bei denen die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ zutrifft, ist die rücktreibende Beschleunigung der Auslenkung proportional. Die Pendelbewegung ist somit für kleine Auslenkungen annähernd eine harmonische Schwingung auf der Grundlage eines linearen Kraftgesetzes.

Die Gleichung $\ddot{s} + \frac{g}{l} s = 0$ nennt man eine lineare harmonische Differentialgleichung II. Ordnung. Es ist nicht Aufgabe, diese Differentialgleichung explitit zu lösen. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist jedoch ebenfalls

$$s(t) = s_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad mit \;\; \omega^2 = \frac{g}{l} \; .$$

Die Gleichung $\omega^2 = \frac{g}{l}$ wird auch als thomsonsche Schwingungsgleichung für ein Fadenpendel bezeichnet.
Die am häufigsten verwendete Form dieser Gleichung ist:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Aufgabe:

Wie lang ist die Pendellänge eines Sekundenpendels bei einer Standuhr?

Lösung:

Die Schwingungsdauer eines Pendels bei einer Standuhr beträgt 2s.
Daraus folgt:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \quad \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{4s^2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = \frac{9{,}81m}{\pi^2} = 0{,}994m \approx 1m .$$