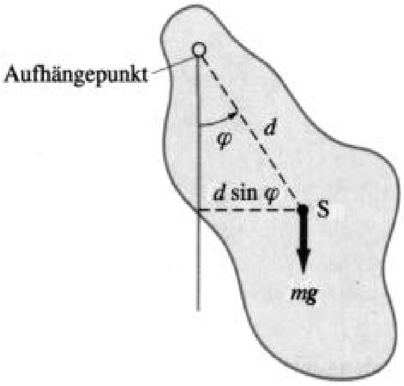
Das physikalische Pendel und das Torsionspendel

Definition:
Unter einem physikalischen Pendel versteht man einen im Schwerefeld um eine Drehachse schwingenden starren Körper.



Betrachten wir dazu das zweidimensionale Gebilde. Es ist in einem Punkt aufgehängt, der sich im Abstand *d* vom Schwerpunkt befindet, und es wurde um den Winkel φ ausgelenkt. Das Drehmoment $mgd \cdot \sin \varphi$ wirkt der Auslenkung entgegen. Winkelbeschleunigung α und Drehmoment *M* hängen über

$$M = J \cdot \alpha = J \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

wobei $M = J \cdot \alpha$ das newtonsche Grundgesetz der Rotation darstellt,

zusammen, wobei J das Trägheitsmoment der Figur bezüglich des Aufhängepunktes ist. Setzen wir $-mgd \cdot \sin \varphi$ für das Drehmoment ein, erhalten wir eine homogene lineare Differentialgleichung II. Ordnung:

$$-mgd \cdot \sin \varphi = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ oder}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgd \sin \varphi}{J} \text{ oder}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{mgd}{J} \cdot \sin \varphi(t) \text{ oder}$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{mgd}{J} \cdot \sin \varphi(t) = 0$$

dessen Lösung für sehr kleine Auslenkwinkel $\varphi(t)$ mit der Bedingung $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$
$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ ist.
Für ein mathematisches Pendel, bei dem $J = ml^2$ und $d = l$ ist, geht die Gleichung in die Gleichung: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g\varphi}{l} = -\omega^2\varphi$ über.
Bei einer annähernd harmonischen Schwingung für kleine Auslenkungen gilt: $\sin \varphi \approx \varphi$.
Dadurch gilt für ein physikalisches Pendel:

$$\omega^2 = \frac{mgd}{J} \text{ und für die Periodendauer } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mgd}} \,.$$

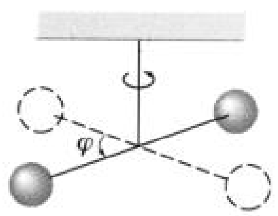
Für einen um sein **Ende schwingenden Stab** gilt für die Periodendauer:

Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Aufhängepunkt ist $d = \frac{1}{2} l$ und das Trägheitsmoment ist $J = \frac{1}{3} m l^2$.

Somit gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m l^2}{mg\left(\frac{1}{2} l\right)}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{3g}} \,.$$

<u>Das Torsionspendel</u>



Dieses Torsionspendel besteht aus einem Gegenstand, der über einen Draht (Feder) an einem festen Punkt aufgehängt ist. Wird die Feder um einen kleinen Winkel φ verdreht, so übt er ein rückstellendes Drehmoment aus, das diesem Winkel φ proportional ist:

$$M = -D\varphi \,.$$

Die Proportionalitätskonstante D wird **Torsionskonstante** oder **Winkelrichtgröße** genannt. Man kann sie messen, indem man ein bekanntes Drehmoment ausübt, um die Feder zu verdrillen, und den resultierenden Winkel bestimmt.

Für das Trägheitsmoment ***J*** des Körpers, das Drehmoment ***M*** und die Winkelbeschleunigung gilt:

$$M = -D\varphi = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J}\varphi = -\omega^2 \varphi \,.$$

Diese Differentialgleichung II. Ordnung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$ oder der

Periodendauer: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$.

<u>Lösungsmöglichkeit von homogenen linearen Differentialgleichungen II. Ordnung</u>

Beispiel: physikalisches Pendel

Gegeben sei die Bewegungsgleichung für ein physikalisches Pendel mit kleinem Auslenkwinkel $j(t)$:

$$\ddot{j}(t)+\frac{mgd}{J}\cdot j(t)=0.$$

Die Besonderheit dieser Gleichung liegt im Fehlen des geschwindigkeitsabhängigen Summanden auf Grund fehlender Reibung.
Somit ist es möglich, die oben genannte Differentialgleichung durch einen e-Ansatz zu lösen.
Dieser e-Ansatz wird wie folgt gewählt:

Ansatz: $j(t)=A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}$.

Dann gilt: $\dot{j}(t)=i\cdot l\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}$ und

$$\ddot{j}(t)=i\cdot i\cdot l^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}=i^2\cdot l^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}=-l^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}.$$

Nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$-l^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}+\frac{mgd}{J}\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}=0.$$

Mit $\frac{mgd}{J}=w^2$ erhält man:

$$-l^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}+w^2\cdot A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}=0.$$

Jetzt gilt es die Parameter l und w zu bestimmen.

Es gilt: $A\cdot e^{i\cdot l\cdot t}\cdot\left(w^2-l^2\right)=0$.

Ein Produkt ist dann Null, wenn mindestens ein Faktor 0 ist. Der Faktor der e-Funktion kann niemals Null werden, also muss gelten:

$$\left(w^2-l^2\right)=0.$$

Dann gilt: $w^2=l^2\Rightarrow w_{1;2}=\pm\sqrt{l^2}\Rightarrow w_1=l\wedge w_2=-l$.

Damit erhält man über den Lösungsansatz zwei spezielle Lösungen der Differentialgleichung durch Einsetzen in den Lösungsansatz:

$$j_1(t)=A\cdot e^{i\cdot w\cdot t}\text{ und}$$
$$j_2(t)=A\cdot e^{-i\cdot w\cdot t}.$$

Die **Linearkombination** zweier spezieller Lösungen einer Differentialgleichung ergibt die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Damit gilt: $j_1(t)+j_2(t)=j(t)=A\cdot\left(e^{iwt}+e^{-iwt}\right)$.

Diese Gleichung wird nun mit der Zahl *2* erweitert. Dann gilt:

$$j_1(t)+j_2(t)=j(t)=2A\cdot\frac{\left(e^{iwt}+e^{-iwt}\right)}{2}.$$

Nach dem gaußschen Additionstheorem $\cos j=\frac{\left(e^{ij}+e^{-ij}\right)}{2}$ gilt:

$$j_1(t)+j_2(t)=j(t)=2\cdot A\cdot\cos(w\cdot t).$$

$2A$ stellt die Amplitude des Winkels dar, womit dann gilt: $j_1(t)+j_2(t)=j(t)=j_0\cdot\cos(w\cdot t)$.

Das ist die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung!