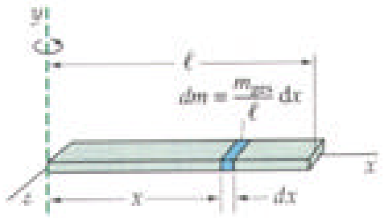
Bestimmung von Trägheitsmomenten von Körpern mit kontinuierlicher Massenverteilung

Für den allgemeineren Fall eines Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung, zum Beispiel eines Reifens, bestimmt man das Trägheitsmoment zu einer gegebenen Achse durch Integralrechnung.

Ausgangspunkt: $J = \int\limits_{(m)} r^2 dm$.

Trägheitsmoment eines Quaders:



8.9 Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines homogenen Quaders mittels Integration. Die Drehachse steht senkrecht zum Quader und geht durch eines seiner Enden.

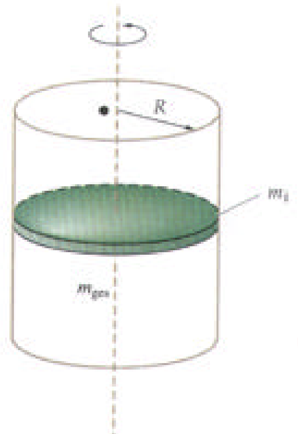
Mit der Rotationsachse y gilt: $J_y = \int\limits_0^l x^2 dm = \int\limits_0^l x^2 \frac{m_{Ges}}{l} dx = \frac{m_{Ges}}{l} \int\limits_0^l x^2 dx = \frac{m_{Ges}}{l} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l$

$$\Rightarrow J_y = \frac{1}{3} m_{Ges} \cdot l^2$$

Bestimmung des **Trägheitsmomentes** eines **homogenen Kreiszylinders** für Drehungen um seine Längsachse.

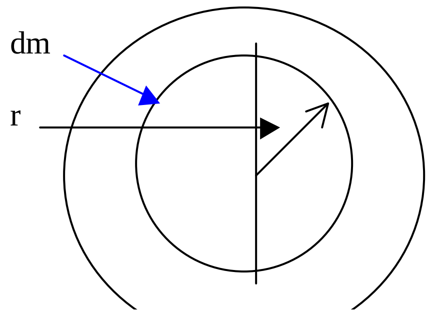
Wir können den Zylinder als eine Anordnung übereinander geschichteter Scheiben mit der Masse m_i auffassen.

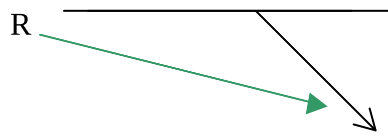
Somit gilt:



.

Man betrachte zunächst eine homogene Scheibe und auf dieser ein Massenelement *dm* mit dem Abstand *r* zum Drehzentrum.





Die Massenverteilung ist auf der Scheibe kontinuierlich.
Dann gilt:

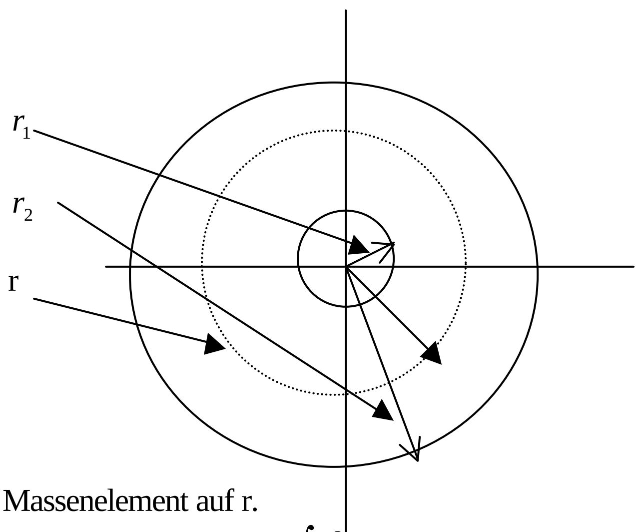
$$dm = \frac{m_{Ges}}{A} dA = \frac{m_{Ges}}{A} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{m_{Ges}}{A} 2\pi\, r dr = \frac{2\pi\, m_{Ges}}{\pi\, R^2} \int r^3 dr = \frac{2\pi\, m_{Ges}}{\pi\, R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m_{Ges} \cdot R^2 .$$

Dann ergibt sich für das Trägheitsmoment des gesamten Zylinders:

$$J = \sum_i \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} m_{Ges} R^2 .$$

Das Trägheitsmoment für einen **Hohlzylinder**:



dm sei Massenelement auf r.

Dann gilt: $J_{Hohl} = \int r^2 dm$. Für das Massenelement gilt: $dm = \rho \cdot dV$ und $dm = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l dr$.

Dann gilt: $J_{Hohl} = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l dr = 2\pi \cdot \rho \cdot l \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_1}^{r_2}$

$J = 2\pi \cdot l \cdot \rho \cdot \left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_1^4}{4} \right)$ erweitern mit m_{Ges}

$$J = \frac{\pi \cdot l \cdot \rho}{2} \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2\right) \cdot \frac{m_{Ges}}{m_{Ges}}$$

Für das Volumen eines Hohlzylinders gilt:

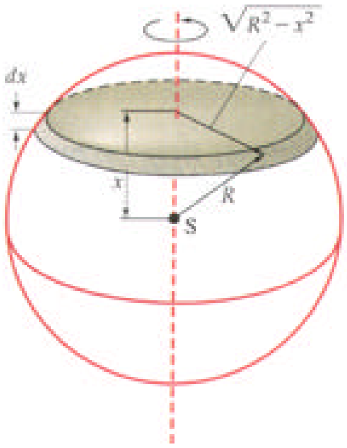
$V = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot l$ und somit gilt: $m_{Ges} = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot l \cdot \rho .$

Einsetzen für m_{Ges} und es gilt:

$$J_{Hohl} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot l \cdot \boldsymbol{r}}{2} \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2\right) \cdot \frac{m_{Ges}}{\boldsymbol{p}\left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot l \cdot \boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\left(r_2^2 + r_1^2\right) \cdot m_{Ges} .$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Kugel mit homogener Dichte.

Problem: Für die Integration lässt sich keine stetige Funktion finden.



Wir berechnen dieses Trägheitsmoment, indem wir die Kugel so behandeln, als ob sie aus Scheiben zusammengesetzt wäre.
Wir betrachten eine Scheibe in der Höhe x über dem Mittelpunkt. Für den Radius der Scheibe gilt:

$r = \sqrt{R^2 - x^2}$. (rechtwinkliges Dreieck)

Das Volumen der Scheibe ist gleich **Fläche** mal **Höhe**, also $dV = \boldsymbol{p} \cdot r^2 dx$.

Wenn m_{Ges} die Gesamtmasse und V das Volumen der Kugel sind, dann gilt, weil wir eine homogene Dichte vorausgesetzt haben, überall in der Kugel, also auch in jedem kleinen Volumenelement:

$$\boldsymbol{r} = \frac{m_{Ges}}{V} .$$

Die Masse jeder Scheibe beträgt somit:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{m_{Ges}}{V} \text{ also } dm = \frac{m_{Ges}}{V} dV .$$

$$\Rightarrow dm = \frac{m_{Ges}}{V} \cdot \boldsymbol{p} \cdot r^2 dx = \frac{m_{Ges}}{V} \boldsymbol{p}\left(R^2 - x^2\right) dx$$

Das Trägheitsmoment für eine Scheibe ist dann:

$$dJ_{Sch} = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\left[\frac{m_{Ges}}{V} \boldsymbol{p} \cdot \left(R^2 - x^2\right) dx\right]$$

$$dJ_{Sch} = \frac{1}{2} \frac{m_{Ges}}{V} \cdot \boldsymbol{p}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx .$$

Wenn wir x zwischen 0 und R variieren lassen, haben wir damit nur die obere Hälfte der Kugel berücksichtigt. Das gesamte Trägheitsmoment der Kugel ist daher gleich dem Doppelten des Integrals dJ von $x = 0$ bis $x = R$:

$$J_{Kugel} = 2 \cdot \int_0^R \frac{1}{2} \frac{m_{Ges}}{V} \cdot \boldsymbol{p}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx .$$

Das Integral in dieser Gleichung kann ausgerechnet werden, indem man $\left(R^2 - x^2\right)^2 = R^4 - 2R^2x^2 + x^4$ schreibt und Term für Term integriert. Das Ergebnis lautet:

$$\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^2 = \frac{8R^5}{15}.$$

Für das Trägheitsmoment der Kugel erhalten wir also:

$$J_{Kugel} = \frac{\pi \cdot m_{Ges}}{V}\frac{8R^5}{15} = \frac{2}{5}m_{Ges}R^2,$$

wobei wir $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ verwendet haben.