Physik des starren Körpers – Das Trägheitsmoment

Wiederholung Kreisbewegung Klasse 11

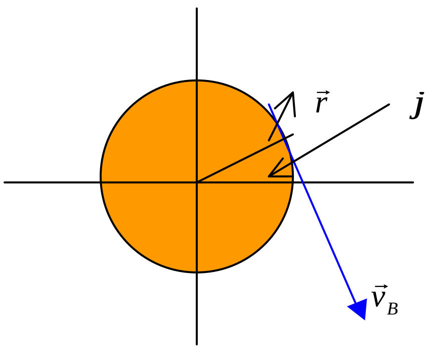
$\vec{v}_B = \frac{2p \cdot r}{T}$ T... Umlaufzeit

$a_r = \frac{v_B^2}{r}$ Radialbeschleunigung

$F_R = m \cdot \frac{v^2}{r}$ Radialkraft wirkt immer zum Drehzentrum

Zentrifugalkraft ist eine gleichgroße Gegenkraft zur Radialkraft und eine Scheinkraft.
Experiment: Drehhocker

Wesentliche Grundlagen:



Definition der Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{\Delta j}{\Delta t} \qquad j \text{ ... Drehwinkel}$$

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Winkelgeschwindigkeit konstant. Diese Bewegung stellt jedoch eine beschleunigte Bewegung dar. Die „Gleichförmigkeit“ bezieht sich auf die Konstants der Bahngeschwindigkeit. So lässt sich die Bahngeschwindigkeit wie folgt darstellen:

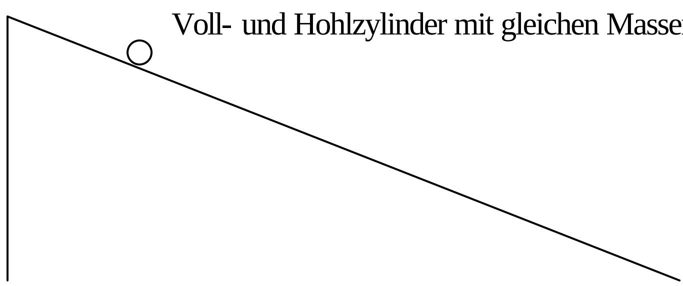
$$\vec{v}_B = \vec{r} \times \vec{w}.$$

In Analogie zur Translation gilt für die Winkelbeschleunigung:

$$a = \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad \text{siehe Translation:} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

$$\Rightarrow w = a \cdot t \text{ mit } a = konst.$$

Gedankenexperiment:



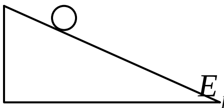
Voll- und Hohlzylinder mit gleichen Massen und gleichen Radien

Welcher dieser Körper erreicht schneller das Ende der geneigten Ebene?

Beobachtungsergebnis: Der Vollzylinder ist schneller als der Hohlzylinder!

Die Kräftebetrachtung ist kompliziert, aber es muss der Energieerhaltungssatz gelten.

$$\sum_{i=1}^{n} E_{i_{(A)}} = \sum_{i=1}^{n} E_{i_{(E)}}$$ Bedingung: abgeschlossenes System



$$E_{pot} = E_{kin(T)} + E_{kin(R)} \qquad E_{kin(R)} = E_{rot}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \frac{m}{2} v_T^2 + \frac{m}{2} v_R^2$$

Wir betrachten ein Massenelement, welches von der Drehachse einen festen Abstand hat!

Dann gilt für jedes Massenelement, welches diese Eigenschaft aufweist:

$$E_{kin(R)} = \frac{\Delta m}{2} v_B^2 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

für den Fall, das die Winkelgeschwindigkeit senkrecht zum Abstand des Massenelementes steht, gilt:

$$v_B = \omega \cdot r$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit befindet sich immer auf der Drehachse!

Dadurch gilt für die Rotationsenergie:

$$E_{kin(Rot)} = \frac{\Delta m}{2} \omega^2 \cdot r^2$$ für jeden einzelnen Massenpunkt.

Für die Energie aller vorhandenen Massenpunkte erhält man die Gesamtenergie:

$$E_{Ges(Rot)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m}{2} \omega^2 \cdot r_i^2 .$$ Die Winkelgeschwindigkeit ist für jeden Massenpunkt konstant.

$$\Rightarrow E_{Ges(Rot)} = \lim_{\Delta m \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^2}{2} r_i^2 \cdot \Delta m = \frac{\omega^2}{2} \left[\int_{(m)} r^2 \, dm \right] \underset{def}{=} J$$ **Trägheitsmoment**

$$\Rightarrow E_{(Rot)} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i$$

$$\Rightarrow E_{(Rot)} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

Für die jeweilige Rotationsenergie ist jeweils das Trägheitsmoment des konkreten Körpers notwendig.