Energie des Magnetfeldes einer Spule

Es gilt für eine stromdurchflossene Spule entsprechend dem Induktionsgesetz:

$$U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} \text{ bzw. } U_{ind} = -L \cdot \dot{I}.$$

In der Zeitspanne Δt verrichtet der Induktionsstrom I die elektrische Arbeit:

$$\Delta W = U_{ind} \cdot I \cdot \Delta t = \left(-L\frac{\Delta I}{\Delta t}\right) \cdot I \cdot \Delta t = -L(I\Delta I).$$

Ist die Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$ die Gesamtdauer des Induktionsvorganges, so lässt sich die Gesamtarbeit des Induktionsstromes durch ein bestimmtes Integral berechnen. Mit der experimentellen Bedingung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ auch die Spannung $U_0 = 0V$ ist, gilt:

$$W = \int_0^\infty U \cdot I \cdot dt$$

$$W = \int_{I_0}^0 -L \cdot I \cdot dI = -\left[\frac{L \cdot I^2}{2}\right]_{I_0}^0 = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2.$$

Fließ durch eine Spule der Induktivität L der Strom I, so ist im Magnetfeld der Spule die magnetische Feldenergie

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2$$ ***gespeichert.***

Aufgaben zur Induktivität und zur Energie des magnetischen Feldes

Aufgabe 1

Eine Spule mit einer Selbstinduktion von $8H$ werde von einem Strom der Stärke $3A$ durchflossen, der sich mit einer Geschwindigkeit von $200\frac{A}{s}$ ändere.

Bestimmen Sie
a) den magnetischen Fluss durch die Spule und
b) die Induktionsspannung.

Aufgabe 2

Eine Spule der Länge $25cm$ mit dem Radius $1cm$ und 400 Windungen werde von einem Strom der Stärke $3A$ durchflossen.
a) Bestimmen Sie ***B*** auf der Spulenachse in der Mitte der Spule,
b) Den Fluss durch die Spule unter der Annahme, dass ***B*** homogen ist,
c) Sie Selbstinduktivität der Spule, und

d) die Induktionsspannung, wenn sich der Strom mit der Geschwindigkeit $150\frac{A}{s}$ ändert.

****Aufgabe 3**

Zeigen Sie: Durch eine Spule mit N Windungen und dem Widerstand R fließt stets die gesamte Ladung $Q = N(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})$, wenn sich der Fluss durch eine Windung der Spule von Φ_{m1} auf Φ_{m2} ändert – unabhängig davon, wie dies geschieht.

Aufgabe 4

Zwei Spule seien so parallel geschaltet, dass sie jeweils nicht vom Magnetfeld der anderen durchdrungen werden. Zeigen Sie, dass dann die effektive Induktivität durch

$$L_{ges} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

gegeben ist.

Lösung zu 1:

Zu a) Aus der Definition für den magnetischen Fluss ergibt sich $\Phi = L \cdot I = 24Wb$.

b) $U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} = -1600V$

Lösung zu 2:

a) Das Feld der Spule ist: $B = m_0 nI = m_0\left(\frac{N}{l}\right)I = 6{,}03 \cdot 10^{-3}T$.

b) Der Fluss ist: $\Phi = NBA = 7{,}58 \cdot 10^{-4}Wb$.

c) $L = \frac{\Phi}{I} = 253mH$.

d) $|U_{ind}| = L\frac{dI}{dt} = 37{,}9mV$

Lösung zu 3:

Wenn sich der Fluss ändert, wird eine Spannung induziert und es fließt ein Induktionsstrom, für den gilt:

$$I = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot N \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Wegen $I = \frac{dQ}{dt}$ ist die Ladung, welche die Spule passiert, gegeben durch:

$$Q = \int dQ = \int_{t_1}^{t_2} Idt = -\frac{N}{R}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi_m}{dt}dt = -\frac{N}{R}\int_{f_1}^{\Phi_2} d\Phi_m = \frac{N}{R}(\Phi_{m1} - \Phi_{m2}).$$

Die gilt unabhängig davon, wie sich der Fluss von einem Wert zu anderen ändert.

Lösung zu 4:

Es gilt in einer Parallelschaltung (1) $U_{ges} = U_1 = U_2$ und

(2) $I_{ges} = I_1 + I_2$.

Für die Induktionsspannung gilt: $U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow U_{ind1} = -L_1\frac{dI_1}{dt}$

$U_{ind2} = -L_2\frac{dI_2}{dt}$.

weiterhin gilt: $dI_1 = -\frac{U_{ind1}dt}{L_1}$ und $dI_2 = -\frac{U_{ind2}dt}{L_2}$.

Damit gilt wegen (2): $-\frac{U_{ind(ges)}dt}{L_{ges}} = -\frac{U_{ind1}dt}{L_1} - \frac{U_{ind2}dt}{L_2}$.

Wegen (1) gilt: $\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

Nach dem Auflösen gilt: $L_{ges} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$.