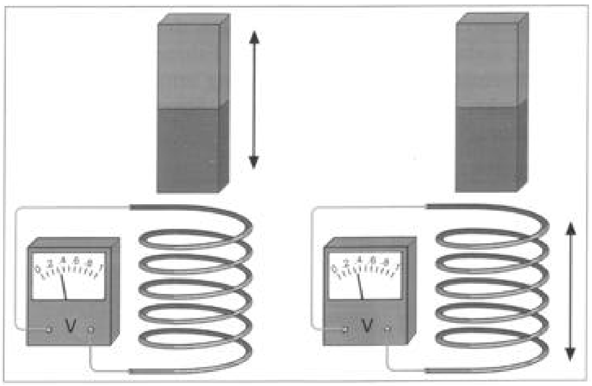
Das Induktionsgesetz

Interpretation der Gleichung: $U_{ind} = B \cdot v \cdot d$ **.**

Wovon hängt der Betrag der Induktionsspannung ab?

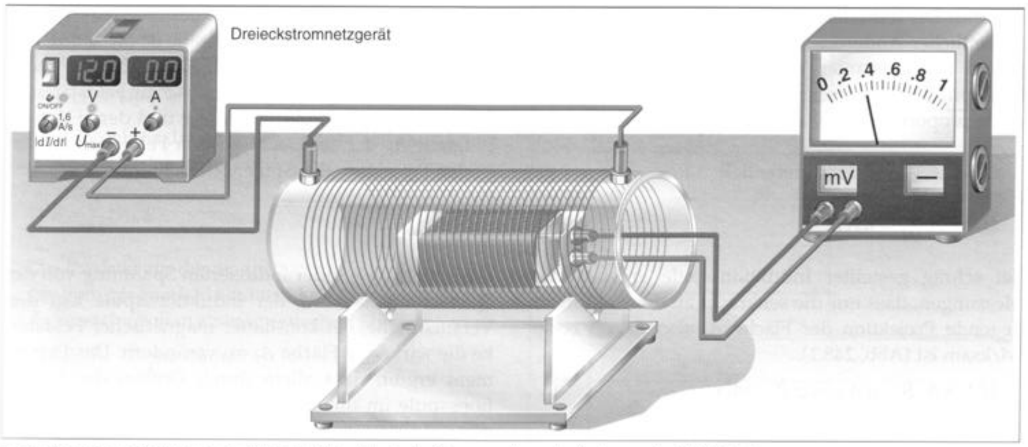
Experiment 1:



246.1 Bewegen sich ein Magnet und eine Spule relativ zueinander, so wird eine Spannung induziert

1. Beim Nähern des Stabmagneten zeigt das Messgerät einen Spannungsstoß an; beim Entfernen des Magneten wird eine entgegengesetzt gepolte Spannung induziert. Bewegt man statt des Magneten die Induktionsspule, so beobachtet man dasselbe. Wegen der Inhomogenität des Feldes des Stabmagneten, ändert sich bei der Relativbewegung das Magnetfeld, das die spule durchsetzt.
2. Je schneller die Relativbewegung von Magnet oder Leiter ist, desto größer ist der Betrag der Induktionsspannung.

Experiment 2



247.1 Versuch zur Bestimmung der Abhängigeit der induzierten Spannung U von der Änderung der Feldstärke B

Eine Feldspule ist mit einem „Dreiecksgenerator (schneller Ein- und Ausschalter) verbunden, der einen mit der Zeit linear ansteigenden und periodisch wieder linear abfallenden Strom liefert, d.h. der Quotient $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ ist während des Anstieges bzw. während des Abfalls konstant.

Am Generator kann die „Stromänderungsgeschwindigkeit“ $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ unterschiedlich eingestellt werden. Im Inneren der Feldspule befindet sich eine Induktionsspule. Die induzierte Spannung wird gemessen.

Beobachtung:

1. Bei linearem Anstieg des Spulenstroms ist die induzierte Spannung U konstant. Wenn $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ konstant ist, ist wegen $B = m_0 \cdot \frac{n \cdot I}{l}$ auch $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ konstant.
2. Misst man U für unterschiedliche „Änderungsgeschwindigkeiten“ des Spulenstroms, so ergibt sich eine Proportionalität zwischen U und $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ bzw. $\frac{\Delta B}{\Delta t}$.

Damit erhält man zusammengefasst folgende Aussage:

Die induzierte Spannung U ist proportional zur zeitlichen Änderung der magnetischen Feldstärke B.

$$U \propto \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ bzw. } U \propto \frac{dB}{dt} = \dot{B} \text{ (für kleine zeitliche Änderungen)}$$

Experiment 3

Bei der Induktionsspule im Versuch 2 wird die Spannung bei konstantem $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ nun über der Hälfte, einem Drittel und einem Viertel der Windungen abgegriffen.

3. Die Induktionsspannung U ist bei konstanter zeitlicher Änderung des magnetischen Feldes der Windungszahl n der Induktionsspule proportional.

Daraus folgt:

$$U \propto n \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ bzw. } U = C \cdot n \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ oder differentiell } U = C \cdot n \cdot \frac{dB}{dt} = C \cdot n \cdot \dot{B}.$$

Durch eine **Einheitenbetrachtung** erhält man für die Konstante C dieser Gleichung:

$$[C] = \frac{[U_{ind}]}{[n] \cdot \left[\frac{\Delta B}{\Delta t}\right]} = \frac{1V}{\frac{1Vs}{m^2 s}} = 1m^2 .$$

Das legt die Vermutung nahe, dass die Konstante von einer Fläche, z.B. der Querschnittsfläche der Spule, abhängt. Die Querschnittsfläche der Feldspule hat auf die Feldstärke B und damit auch auf $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ in der Induktionsspule keinen Einfluss. Die Querschnittsfläche der Induktionsspule könnte aber einen Einfluss auf U haben .

Die Induktionsspannung und der Flächenvektor

Bei den ihnen gezeigten Experimenten stand der Vektor der magnetischen Feldstärke $\vec{B}$ senkrecht auf der Fläche der Induktionsspule. Verdrehen wir die Induktionsspule um den Winkel j , so wird die in ihr induzierte Spannung bei sonst festgehaltenen Parametern kleiner.
Wir beschreiben die Stellung der Querschnittsfläche A der Induktionsspule zur magnetischen Feldstärke $\vec{B}$, indem wir der Fläche A den Flächenvektor $\vec{A}$ zuordnen, der senkrecht auf dieser Fläche steht und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ist.

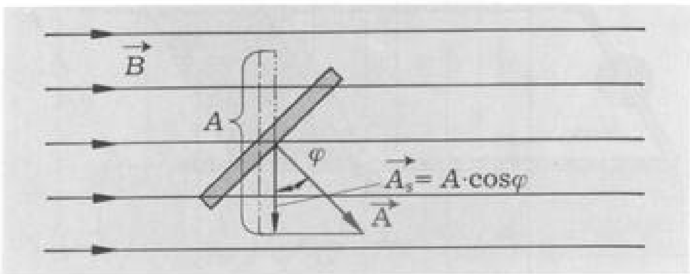


Abb. 261.1 Flächenvektor $\vec{A}$ und wirksame Fläche der In-

Bilden die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ den Winkel j miteinander, so gilt für die induzierte Spannung:

$$U_{ind}(j) = U_{ind}(0) \cdot \cos j .$$

Dieses Ergebnis besagt, dass es nicht auf die von der Induktionsspule umrandete Fläche A, sondern auf die von dem magnetischen Feld $\vec{B}$ durchsetzte wirksame Fläche

$$A_j = A \cdot \cos j$$

ankommt.
Damit können wir die Beziehung

$$U_{ind} = n \cdot \vec{A} \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t}$$

oder im Grenzfall mit $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} = \frac{d\vec{B}}{dt}$:

$$U_{ind} = n \cdot \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} .$$

Wird die Fläche A einer Leiterschleife von den Feldlinien eines homogenen Magnetfeldes durchsetzt, so erhält man die induzierte Spannung aus der Beziehung:

$$U_{ind} = n \cdot \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Hier ist $\vec{A}$ der Flächenvektor senkrecht zur Fläche der Leiterschleife.

Aus den bisherigen Darstellungen lässt sich nun expliziert das Induktionsgesetz ableiten und formulieren.
Wir können die Erzeugung einer Induktionsspannung auf zwei verschiedene Arten interpretieren:

- durch die Relativbewegung eines Leiters der Länge *d* zu einem Magnetfeld der Stärke *B* mit der dazu senkrecht laufenden Geschwindigkeit der Ladungsträger; in diesem Fall ergibt sich die induzierte Spannung gemäß
  $$U_{ind} = B \cdot v \cdot d$$
- durch eine zeitliche Änderung $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ des Magnetfeldes. Falls die Spulenfläche *A* senkrecht von dem sich ändernden Magnetfeld durchsetzt wird, gilt:
  $$U_{ind} = n \cdot \vec{A} \frac{\Delta\vec{B}}{\Delta t}.$$

Beide Arten der Spannungserzeugung scheinen zunächst auf verschiedenartige Vorgänge zu beruhen.
Dennoch wollen wir die Frage untersuchen, ob diese beiden verschiedenen Möglichkeiten der Spannungserzeugung wirklich auch auf völlig verschiedene Gesetzmäßigkeiten beruhen.
*Könnte es nicht sogar sein, dass beide Gesetze lediglich vom jeweiligen Experiment bestimmte Aussagen **eines** physikalischen Grundgesetzes wiedergeben?*
Einen entscheidenden Hinweis zur Beantwortung dieser Frage liefert die **Umkehrung** des Oerstedtversuches.

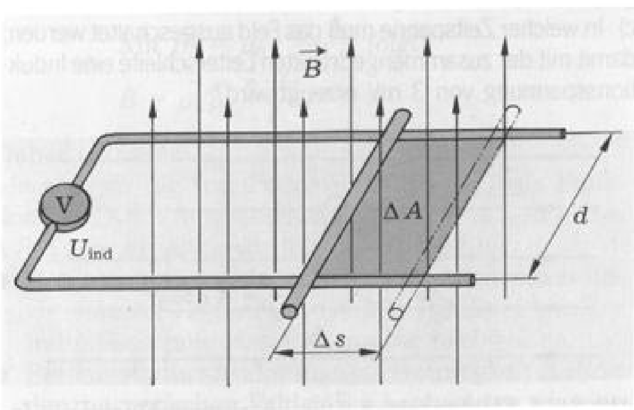


Abb. 262.1 Zur Ableitung des Induktionsgesetzes

In dieser Abbildung ist die Bewegung eines Leiterstückes der Länge d senkrecht zum Magnetfeld B skizziert. In der Zeitspanne Δt bewegt sich das Leiterstück um die Strecke Δs weiter:

$$U_{ind} = B \cdot v \cdot d = B \cdot d \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Wir können das Leiterstück mit Zuleitungen als eine Spule mit einer Windung auffassen, bei der sich die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche A um den Betrag $\Delta A = d \cdot \Delta s$ ändert.
Wir erhalten folglich für die Induktionsspannung:

$$U_{ind} = B \cdot \frac{d \cdot \Delta s}{\Delta t} = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Dieses Ergebnis unserer Überlegungen weist eine bemerkenswerte Symmetrie zur Gleichung

$$U_{ind} = n \cdot \vec{A} \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t}$$ auf.

Diese Gleichung haben wir so interpretiert, dass die Induktionsspannung bei konstanter Spulenfläche *A* proportional zur zeitlichen Änderung der magnetischen Feldstärke $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ ist.

Die Beziehung $U_{ind} = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$ muss dagegen folgendermaßen interpretiert werden:

Bei konstantem Magnetfeld B ist die Induktionsspannung U_{ind} der zeitlichen Änderung $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche proportional. Ändern sich die Feldstärke *B* und die Fläche *A* gleichzeitig, so gilt für die Induktionsspannung bei einer Spulenwindung:

$$U_{ind} = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} + A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

oder in vektorieller Form nach durchgeführter Grenzwertbildung:

$$U_{ind} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{\Delta \vec{B}}{dt}.$$

Nach der Produktregel der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{d\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)}{dt} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{\Delta \vec{B}}{dt}.$$

Damit ergibt sich für die Induktionsspannung bei einer Spulenwindung:

$$U_{ind} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right).$$

Das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{B}$ bezeichnet man oftmals auch als den **magnetischen Fluss** Φ.

Somit ergibt sich für *n* Windungen das **Induktionsgesetz**:

$$U_{ind} = n \cdot \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

Die zwischen den Enden einer Spule induzierte Spannung ist dem Betrag nach gleich dem Produkt aus der Windungszahl n der Spule und der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses durch die Spule oder in einer Spule wird eine Spannung induziert, solange sich das von der Spule umfasste Magnetfeld zeitlich ändert.