Thema: **Mechanik/1 Gravitation**

Die Gravitation und die keplerschen Gesetze

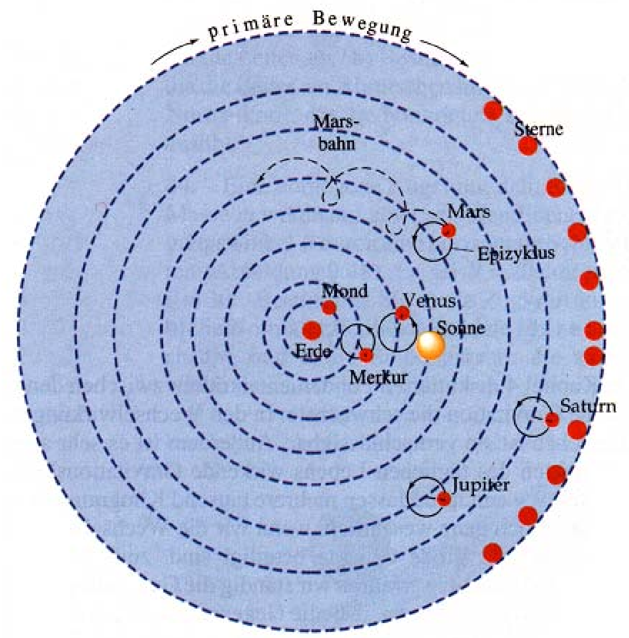
Die keplerschen Gesetze

Vorgehensweise: Am Anfang stellen wir stellen wir die von Kepler empirisch gefundenen Gesetze auf, dann diskutieren wir den Zusammenhang mit dem newtonschen Gravitationsgesetz.

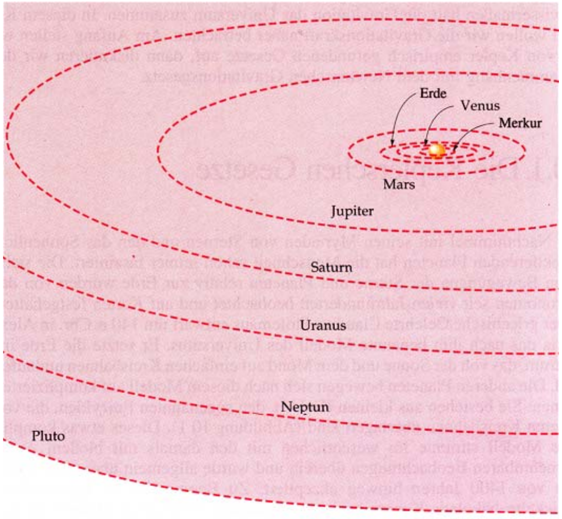
Historie

Der griechische Gelehrte Claudius Ptolemäus entwarf um 140 n.Chr. in Alexandria das nach ihm benannte Modell des Universums.

- die Erde steht im Zentrum, welches von der Sonne und dem Mond auf einfachen Kreisbahnen umlaufen wird,
- Die anderen Planeten bewegen sich nach diesem Modell auf komplizierten Bahnen: Sie bestehen aus kleinen Kreisen, den sogenannten Epikzyklen, die von größeren Kreisbahnen überlagert sind.
- Rund 1400 Jahre wurde dieses Weltbild akzeptiert.

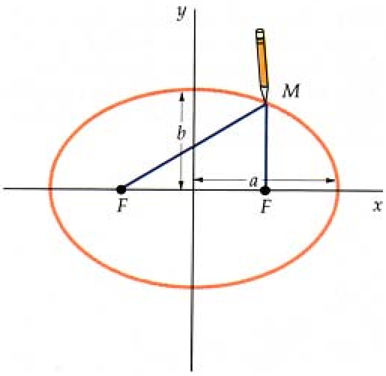


Zu Beginn des 16. Jahrhunderts entwickelte **Nikolaus Kopernikus** sein wesentlich einfacheres Modell: Er betrachtet die Sonne und die anderen Sterne als fest, während die Planeten, einschließlich der Erde, sich auf Kreisbahnen um die Sonne herum bewegen sollten. Die Theorie verbreitete sich in Fachkreisen sehr rasch, erschien als gedrucktes Werk aber erst 1543, dem Todesjahr von Kopernikus, unter dem Titel „De revolutionibus"; interessanterweise ist das Werk dem damaligen **Papst Paul III**. gewidmet.



Der bekannteste Anhänger und Verbreiter der kopernikanischen Lehre vom heliozentrischen Weltbild war **Galileo Galilei**, gegen den aus diesem Grund 1633 in Rom das Inquisitionstribunal eröffnet wurde. Der Prozess endet am 22. Juni 1633 mit dem berühmten, gegen die eigene Überzeugung geleisteten Widerruf der heliozentrischen Lehre durch Galilei. Erst im Jahre 1993 hat der Vatikan seine Vorwürfe gegen Galilei offiziell zurückgenommen und ihn damit a posteriori rehabilitiert.

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts untersuchte der Astronom **Tycho Brahe** die Planetenbewegung und machte Beobachtungen, die wesentlich genauer waren als die bis dahin bekannten. **Johannes Kepler** fand unter Verwendung dieser Daten nach vielem Probieren heraus, dass die Planeten die Sonne nicht auf Kreisbahnen, sondern auf Ellipsenbahnen umlaufen.



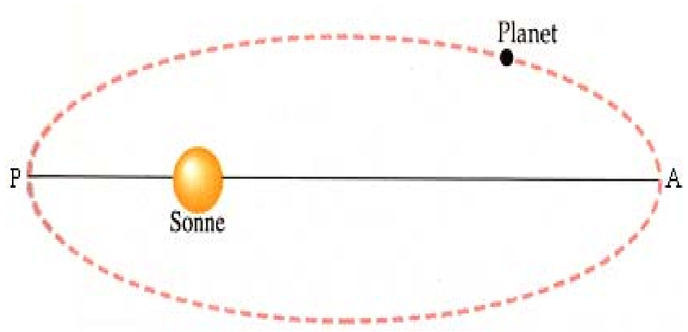
Er zeigte auch, das sich die Planeten nicht mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, sondern das die Geschwindigkeit umso größer ist, je näher sich ein Planet bei der Sonne befindet. Schließlich entwickelte Kepler eine mathematische Beziehung zwischen der Umlaufdauer eines Planeten und seiner durchschnittlichen Distanz zur Sonne. Kepler drückte seine Ergebnisse in Form dreier empirischer Gesetze für die Planetenbewegung aus.

Die ***drei*** **keplerschen Gesetze** lauten:

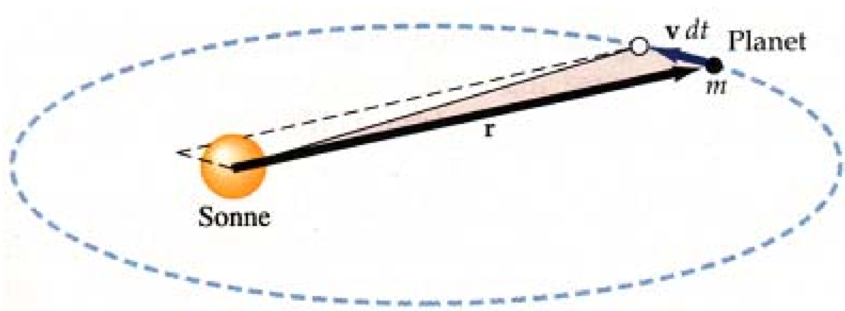
1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.
2. Die Verbindungslinie (Leitstrahl) zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).
3. Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne.

Damit ergibt sich für die mathematische Darstellung:

1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.



2. Die Verbindungslinie (Leitstrahl) zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).



$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = konstant$$

3. Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne.

$$\frac{T^2}{r^3} = konstant$$

<u>Das newtonsche Gravitationsgesetz</u>

Das newtonsche Gravitationsgesetze

Die keplerschen Gesetze waren ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Planetenbewegung. Es handelt sich bei ihnen aber nur um empirisch aufgestellte Regeln, die aus den astronomischen Beobachtungen von Brahe hervorgingen. Erst Newton tat den riesigen Schritt

nach vorne und schrieb die Beschleunigung eines Planeten auf seiner Bahn einer Kraft zu, die zwischen der Sonne und dem Planeten wirkt.
Nach dem **newtonschen Gravitationsgesetz** übt jeder Körper eine anziehende Kraft auf jeden anderen Körper aus.
Er formulierte:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit} \quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \text{ .}$$

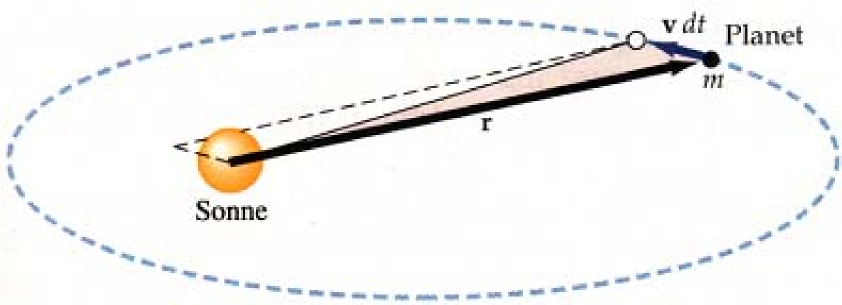
Newton veröffentlichte sein Gravitationsgesetz im Jahre 1686, aber es dauerte noch etwa ein Jahrhundert, bis Cavendish die Konstante $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ experimentell relativ genau bestimmen konnte.
Wir können das Gravitationsgesetz dazu verwenden. Um die Anziehungskraft zweier Körper zu berechnen.

Beispiel
Bestimmen sie die Kraft zwischen zwei Kugeln, die beide die Masse 1kg haben, wenn ihre Mittelpunkte 10cm voneinander entfernt sind.
<u>Lösung</u>

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{1kg \cdot 1kg}{(0{,}1m)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-9}\, N \text{ .}$$

Nach Newton können wir jeden massenbehafteten Körper als Zentrum eines Kraftfeldes auffassen, in dem ein anderer massenbehafteter Körper eine Anziehungskraft erfährt, die wie $\frac{1}{r^2}$ vom Abstand r hängt. Dieses Feld ist ein ***Zentralfeld***. Man spricht auch von sogenannten ***konservativen Kraftfeldern***.

Newton zeigte weiterhin die Richtigkeit der keplerschen Gesetze und das für die Bewegung eines Objektes in einem Feld vom Typ $\frac{1}{r^2}$ genau **drei** verschiedene Bahnformen gibt: Die Bahn muss entweder eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein. Auf parabolischen und hyperbolischen Bahnen bewegen sich genau die Objekte, die einmal an der Sonne vorbeifliegen und dann nie mehr wiederkehren.
Die einzigen geschlossenen Bahnen, die sich in einem Kraftfeld vom Typ $\frac{1}{r^2}$ ergeben können, sind **Ellipsen**. Deshalb ist das erste keplersche Gesetz eine Direkte Konsequenz von Newtons Gravitationsgesetz.
Das zweite keplersche Gesetz, der Flächensatz, ergibt sich aus der Tatsache, dass die Kraft, die die Sonne auf einen Planeten ausübt, zur Sonne hin gerichtet ist. Eine solche Kraft heißt **Zentralkraft**, das entsprechende Kraftfeld **Zentralfeld**.
Da die Kraft auf einen Planeten entlang der Verbindungslinie von ihm zur Sonne wirkt, treten keine Drehmomente bezüglich der Sonne auf.
Es ist bekannt, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, wenn das resultierende Drehmoment auf ein Objekt null ist.



Die o.g. Skizze zeigt einen Planeten, der die sonne auf einer elliptischen Bahn umläuft. Im Zeitintervall dt bewegt sich der Planet um die Strecke $\vec{v}\cdot dt$ weiter und sein Radiusvektor $\vec{r}$ überstreicht die in der Abbildung eingezeichnete Fläche; sie ist genau halb so groß wie das durch die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}\cdot dt$ gebildete Parallelogramm mit der Fläche $\vec{r}\times\vec{v}\cdot dt$. Deshalb ist die Fläche dA, die im Zeitintervall dt vom Radiusvektor überstrichen wird, gegeben durch

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}dt\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\vec{v}dt\right|$$

oder

$$dA = \frac{1}{2m}L\cdot dt\,.$$

Hier ist $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$ der Drehimpuls des Planeten relativ zur Sonne.

Wir zeigen des weiteren, dass das newtonsche Gravitationsgesetz das **dritte** keplersche Gesetz für den Spezialfall einer Kreisbahn einschließt.
Wir betrachten einen Planeten, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer **Kreisbahn** mit dem Radius r um die Sonne bewegt.
Somit gilt das newtonsche Grundgesetz:

$$F_r = m_P\cdot a_r\,.$$

Die Radialkraft wird durch die Gravitationskraft erbracht. Somit gilt:

$$\gamma\cdot\frac{m_S\cdot m_P}{r^2} = m_P\cdot\frac{v_B^2}{r},$$

wobei m_S die Sonnenmasse und m_P die des Planeten ist. Somit gilt:

$$v_B^2 = \gamma\cdot\frac{m_S}{r}\,.$$

Die Geschwindigkeit des Planeten lässt sich durch seine Umlaufzeit ausdrücken.

$$v_P = \frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Somit gilt:

$$v_B^2 = \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \gamma\cdot\frac{m_S}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\cdot m_S} = kons\tan t\,.$$

<u>Die Gravitationsfeldstärke und die Bestimmung der Gravitationskonstante</u>

Die Gravitationsfeldstärke

Die Gravitationsfeldstärke ergibt sich aus dem Quotienten Kraft pro vorhandener Masse.

$$\vec{g}(r)=\frac{\vec{F}}{m_S}=\frac{\gamma\cdot\frac{m_S\cdot m_E}{\vec{r}^{\,2}}}{m_S}=\gamma\cdot\frac{m_E}{\vec{r}^{\,2}}$$

Für einen Körper auf der Erdoberfläche gilt:

$$\boxed{g(r_E)=\frac{F}{m_S}=\gamma\cdot\frac{m_E}{r_E^2}} \text{ mit } r_E=6370km \text{ als Erdradius.}$$

Da die Fallbeschleunigung leicht bestimmbar ist, lässt sich sehr leicht die Gravitationskonstante an der Erdoberfläche berechnen.

Aufgabe 1
Wie groß ist die Fallbeschleunigung eines Gegenstandes, der sich $200km$ über der Erdoberfläche befindet?

Lösung:

$$g=\frac{F}{m}=\gamma\cdot\frac{m_E}{(R_E+200km)^2}=9{,}22\frac{m}{s^2}.$$

Aufgabe 2
In welcher Höhe h über der Erdoberfläche ist die Fallbeschleunigung nur noch halb so groß wie auf Meereshöhe?

Aufgabe 3
Ein Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Erde. Bestimmen Sie die Umlaufdauer,

a) wenn sich der Satellit direkt über der Erdoberfläche befindet,
b) wenn der Satellit eine Höhe von $300km$ hat.

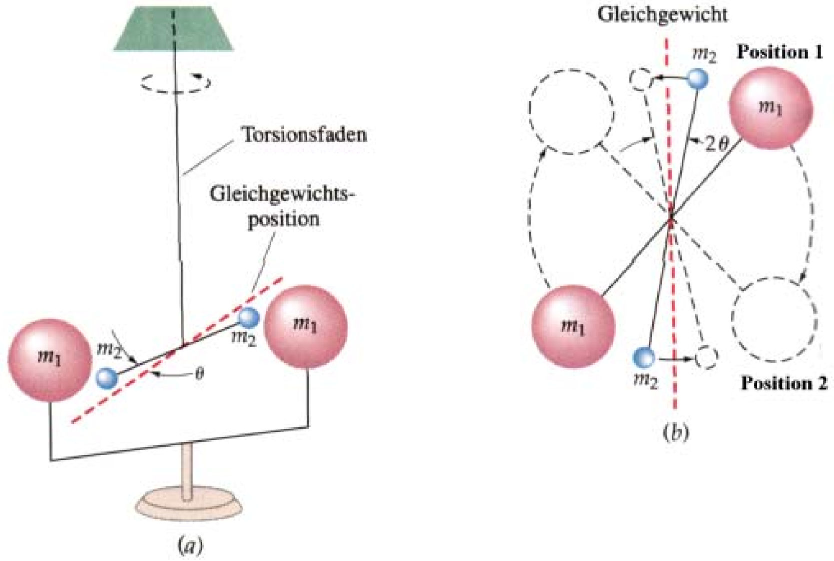
Lösung:

a) $$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot R_E^3}{\gamma\cdot m_E}}=5{,}06\cdot 10^3\,s=84{,}4\min,$$

b) Bei einer Höhe von $300km$ gilt: $T=(84{,}4\min)\left(\frac{r}{R_E}\right)^{\frac{3}{2}}=90{,}4\min$ mit $r=300km+R_E$.

Messung der Gravitationskonstante

Die Kenntnis der Gravitationskonstante ist nicht nur von grundsätzlichem Interesse, sondern hat auch praktische Anwendungen, zum Beispiel bei der Bestimmung der Dichteverteilung im Innern der Erde, des Mondes, anderer Planeten und entfernter Sterne. 1798 gelang Henry Cavendish die erste Messung von γ . Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Schema der Apparatur, die er benutzte, um die Gravitationskraft zwischen zwei Kugelpaaren zu messen, bei denen die Kugeln die Massen m_1 und m_2 haben.



Die kleineren Kugeln (beide mit der Masse m_2) befinden sich an den Enden eines leichten Stabes, der an einen dünnen Draht aufgehängt ist. Die großen Kugeln (Masse m_1) sind ebenfalls durch eine leichte Stange miteinander verbunden und werden so angeordnet, dass ihnen jeweils eine der kleineren Kugeln in einem kleinen Abstand gegenübersteht.

Betrachten wir zunächst nur das an dem dünnen Draht aufgehängte Paar der kleineren Kugeln. Um die beiden Kugeln um den Winkel ϑ aus ihrer Gleichgewichtsposition zu drehen, muss ein Drehmoment wirken, da der Draht verdrillt werden muss. Sorgfältige Messungen zeigen, dass das Drehmoment proportional zum Drehwinkel ist.

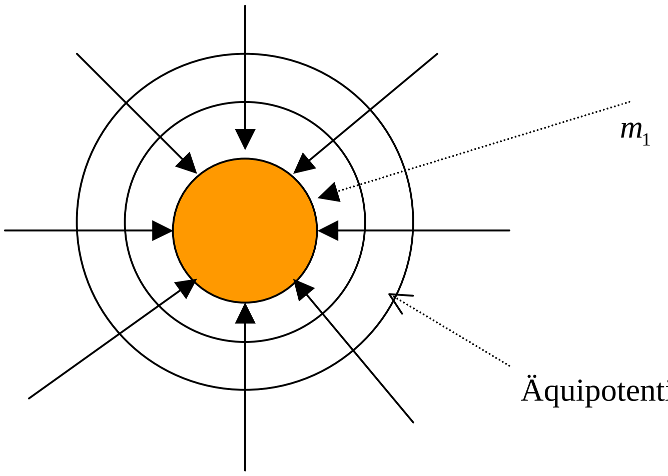
$$M = -D \cdot \vartheta$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Torsionskonstante.

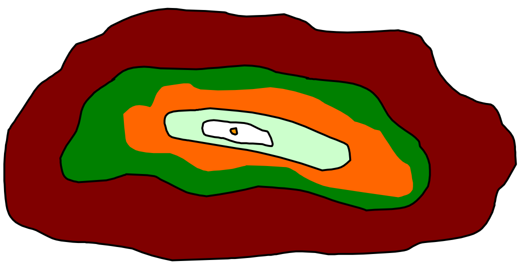
Eine solche Anordnung nennt man auch **Torsions-** oder **Drehwaage** welche im 18. Jahrhundert von John Michell erfunden wurde.
Im Cavendish-Experiment werden, wie gesagt, zwei große Kugeln mit gleicher Masse m_1 nahe an die kleinen Kugeln gebracht – eine solche Anordnung wird als Gravitationswaage bezeichnet. Durch die zwischen den beiden Kugelpaaren wirkende Gravitationskraft wird der Aufhängedraht verdrillt, und das Paar aus den kleinen Kugeln beginnt Torsionsschwingungen auszuführen. Dann wartet man ab, bis die Waage im Gleichgewicht ist. Da die Apparatur sehr empfindlich und die Gravitationskraft sehr klein ist, kann dies einige Stunden dauern. Anstatt nun den Auslenkwinkel ϑ direkt zu messen, ordnet Cavendish die großen Kugel um 90^0 gedreht an (gestrichelte Linie in Abb. B). Wenn die Gravitationswaage wieder im Gleichgewicht ist, hat sie sich gerade um den Winkel 2ϑ gedreht, entsprechend der Umkehrung des Drehmomentes. Bei bekannter Torsionskonstante kann man die Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2 aus der Messung dieses Winkels bestimmen. Mit den Werten der Massen, des Abstandes und der Kraft lässt sich dann die Gravitationskonstante berechnen.

Arbeit und potentielle Energie im Gravitationsfeld und die drei kosmischen Geschwindigkeiten

Gegeben sei ein konservatives Kraftfeld einer vorhandenen Masse.



Mit zunehmender Entfernung nimmt die Gravitationskraft stark ab.
Äquipotentiallinien sind die Verbindungslinien mit den Punkten innerhalb eines Kraftfeldes, die vom Mittelpunkt der Masse die gleiche potentielle Energie besitzen.
Beispiel: Höhenlinien auf einer Wanderkarte oder der Luftdruck auf einer Wetterkarte

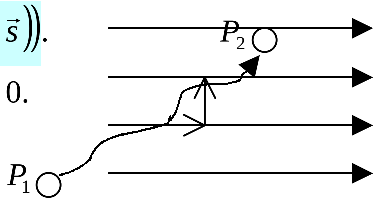


Mit Hilfe solcher Linien ist eine dreidimensionale Vorstellung in solchen Karten möglich. Alle Punkte auf dieser Linie haben dieselbe potentielle Energie. Entlang solcher Wanderwege wird **keine mechanische Arbeit** verrichtet, weil Gewichtskraft uns Weg senkrecht zueinander stehen.

Für die Arbeit im allgemeinen Feld gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ oder $W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ unter der Voraussetzung, das die Kraft zeitunabhängig und für den Vorgang konstant ist.

Es gilt für das Skalarprodukt: $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{F};\vec{s}))$.

Der $\cos(\sphericalangle(\vec{F};\vec{s}))$ für einen Winkel von 90^0 beträgt 0.



Die Bahn lässt sich in genügend kleine rechtwinklige Dreiecke zerlegen, so das der Weg senkrecht zu den Feldlinien keinen Beitrag zum Betrag der verrichteten Arbeit liefert. Das gilt auch in Radialfeldern.
Skizze für das Radialfeld:

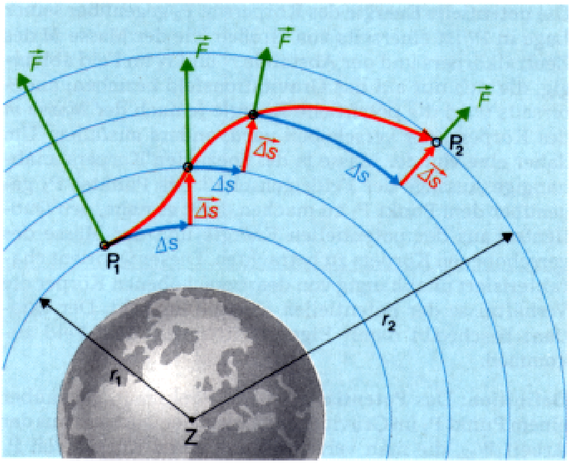


Abb. 2–21: Arbeit im Gravitationsfeld. Der Weg s wird durch Teilwege Δs parallel (blau) und senkrecht (rot) zur Erdoberfläche ersetzt. Entlang der blauen Teilwege ist die Arbeit Null, weil die von außen aufzubringenden Kräfte (grün) senkrecht zu diesen Wegstücken stehen.

Um die Potentialdifferenz bzw. die Verschiebungsarbeit berechnen zu können, benutzen wir den Ansatz: $W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit der konstanten Gravitationskraft entlang der Äquipotentiallinien $F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

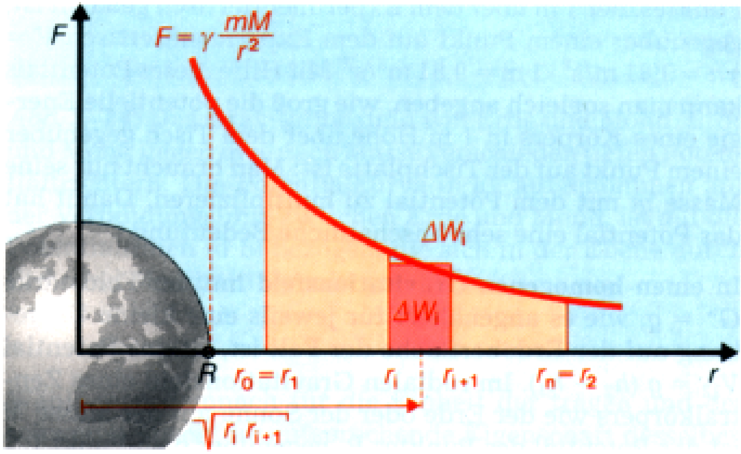


Abb. 2–22: Arbeit im Gravitationsfeld. Für die Verschiebung von r_i bis r_{i+1} setzt man als mittlere Entfernung in diesem Abschnitt $\sqrt{r_i\, r_{i+1}}$ ein (Verlauf der Kurve nicht gemäß $F \sim 1/r^2$!).

Somit gilt für die Verschiebungsarbeit bzw. der Potentialdifferenz (potentielle Energie):

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} dr \,.$$

Die Potentialdifferenz ist demzufolge:

$$\Delta E_{Pot} = E_{Pot}(r_2) - E_{Pot}(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} dr = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \,.$$

$$\Rightarrow \Delta E_{Pot} = -\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{Pot} = -\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta E_{Pot} = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

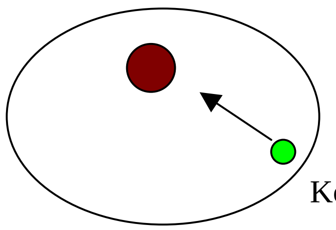
Sollte die Verschiebung von der Erdoberfläche zu einem Satelliten erfolgen, so ist $r_1 \langle r_2$ und der Betrag der Energie negativ, was nur bedeutet, das an diesem Satelliten Arbeit verrichtet werden musste.
Die Gleichung für die potentielle Energie wird auch als **Gravitationspotential** bezeichnet.

Berechnung der kosmischen Geschwindigkeiten:

Um entsprechende Flugbahnen für Satelliten zu erreichen, sind Mindestgeschwindigkeiten notwendig.
Newton zeigte unter Verwendung des Gravitationsgesetzes, das nur drei Bahnformen für Flugkörper (Planeten, Satelliten, Kometen etc.) möglich sind.

1. Ellipsenbahn (Kreisbahn)
2. Parabelbahn
3. Hyperbelbahn

Zu 1. Ein Körper soll auf eine kreisähnliche Bahn transportiert werden.



Körper m_1

Dann besitzt der Körper auf der Umlaufbahn potentielle und kinetische Energie sowie eine Radialkraft, die durch die Gravitationskraft aufgebracht wird. Somit gilt:

$$m_S \cdot \frac{v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{r^2}.$$

Multipliziert man mit den Term $\frac{r}{2}$ so erhält man für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m_S}{2} \cdot v^2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{r}.$$

Die Umlaufgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse des Satelliten. Soll der Körper in einer Höhe eine kreisförmige Bahn beschreiben, so muss ihm die kinetische Energie sowohl zum Erreichen als auch für die Bahn beim Start durch die Anfangsgeschwindigkeit mitgegeben werden. Somit erhält man die **erste kosmische Geschwindigkeit**. Für diesen Fall gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin(A)} + E_{kin(E)} = E_{pot(E)}$$

Mit $R = R_E$ und $h = r - R_E$ gilt:

$$\Rightarrow E_{kin(A)} = \frac{1}{2} m_S \cdot v_0^2 = \gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{R} - \frac{1}{2}\gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{r}.$$

$$\Rightarrow E_{kin(A)} = \frac{1}{2} m_S \cdot v_0^2 = \gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{R} - \frac{1}{2}\gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{r} = \gamma \cdot m_S \cdot m_E \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right).$$

Für die Umlaufbahn in unmittelbarer Nähe der Oberfläche des Zentralkörpers $(r \approx R)$
Erhält man daraus über:

$$\frac{1}{2}m_S \cdot v_0^2 = \gamma \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{2R}$$

die Abschussgeschwindigkeit (im Falle der Erde die sogenannte 1. kosmische Geschwindigkeit)

$$v_0 = \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_E}{R}} \approx 7{,}8\frac{km}{s}.$$

Soll der Körper das Gravitationsfeld des Zentralkörpers verlassen, so führt der Ausdruck für die kinetische Energie mit:

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} E_{kin(A)} = \frac{1}{2}m_S \cdot v_0^2 = \lim_{r\to\infty}\gamma \cdot m_S \cdot m_E\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2r}\right) \text{ über}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_S \cdot v_0^2 = \gamma \cdot m_S \cdot m_E\left(\frac{1}{R}\right)\cdot$$ zur Abschussgeschwindigkeit, im Falle der Erde zur **2. kosmischen Geschwindigkeit**:

$$v_2 = \sqrt{2\gamma \cdot \frac{m_E}{R}} \approx \sqrt{2gR_E} \approx 11{,}2\frac{km}{s}.$$

Die **3. kosmische Geschwindigkeit** zum Verlassen des Sonnensystems, auf dessen Herleitung verzichtet wird beträgt $v_3 \approx 16{,}7\frac{km}{s}$.

Um entsprechende Bahnen zu erreichen müssen für die Geschwindigkeiten, auf Grund entsprechender Kegelschnitte, die nachfolgenden Bedingungen gelten:

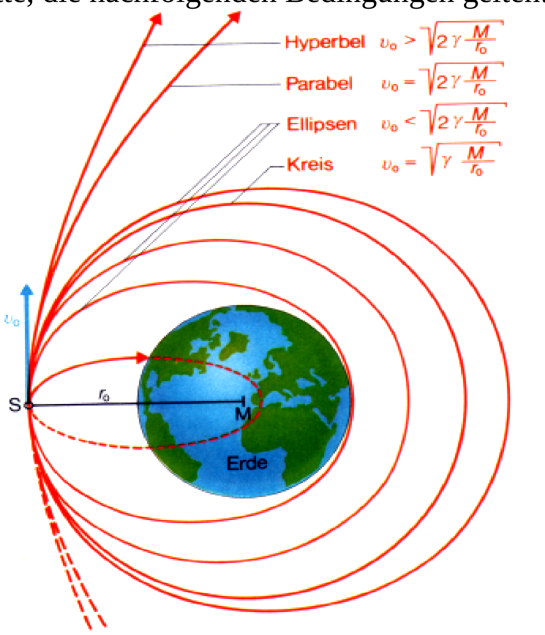


Abb. 2–31: Bahnformen in Abhängigkeit der Startgeschwindigkeit. Der Satellit wird im Abstand r_0 senkrecht zur Verbindungslinie zur Erde mit der Geschwindigkeit v_0 gestartet.